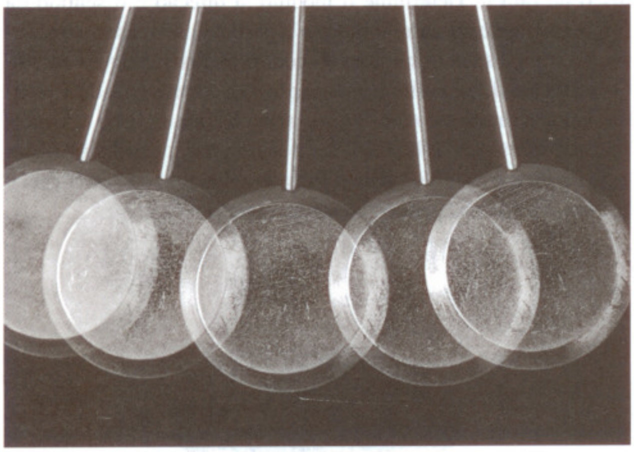
MOVIMENTO PERIÓDICO 13



Suponha que você dobre a massa do pêndulo de um relógio (inclusive a haste e o peso na extremidade) sem alterar suas dimensões. O relógio andaria mais depressa ou mais lentamente?

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Ao estudar este capítulo, você aprenderá:

- Como descrever oscilações em termos da amplitude, período, freqüência e freqüência angular.
- Como fazer cálculos com movimento harmônico simples (MHS), um tipo importante de oscilação.
- Como usar conceitos de energia para analisar MHS.
- Como aplicar os conceitos envolvidos em um MHS a diferentes situações físicas.
- Como analisar os movimentos de um pêndulo simples.
- O que é um pêndulo físico, e como calcular as propriedades de seu movimento.
- O que determina quão rapidamente uma oscilação chega ao fim.
- Como uma força propulsora aplicada a um oscilador na freqüência certa pode provocar uma resposta muito intensa, ou ressonância.

A vibração de um cristal de quartzo em um relógio, a oscilação do pêndulo de um relógio de carrilhão, as vibrações sonoras produzidas por um clarinete ou pelo tubo de um órgão e as oscilações produzidas pelos pistões no motor de um automóvel são exemplos de movimentos que se repetem indefinidamente. Esse tipo de movimento, chamado de **movimento periódico** ou **oscilação**, é o assunto deste capítulo. O entendimento do movimento periódico será essencial para os estudos que faremos sobre as ondas, o som, as correntes elétricas e a luz.

Um corpo que executa movimento periódico encontra-se sempre em uma posição de equilíbrio estável. Quando ele é deslocado dessa posição e libertado, surge uma força ou um torque que o faz retornar à sua posição de equilíbrio. Quando ele atinge esse ponto, entretanto, pelo fato de haver acumulado energia cinética, ele o ultrapassa, parando em algum ponto do outro lado e sendo novamente puxado para sua posição de equilíbrio. Imagine uma bola rolando para a frente e para trás no interior de um recipiente côncavo, ou um pêndulo que oscila de um lado para o outro passando por sua posição de equilíbrio na vertical.

Neste capítulo concentraremos nossa atenção em dois exemplos simples de sistemas que executam movimentos periódicos: o sistema massa-mola e o pêndulo. Também estudaremos por que as oscilações diminuem de intensidade com o tempo e por que algumas oscilações podem se superpor e construir deslocamentos cada vez maiores quando forças periódicas atuam sobre o sistema.

13.1 Causas da oscilação

Na Figura 13.1 vemos um dos sistemas mais simples que podem executar um movimento periódico. Um corpo de massa m está em repouso sobre um trilho horizontal sem atrito, tal como no caso de um trilho de ar linear, de modo que ele pode se mover apenas ao longo do eixo Ox. A mola presa ao corpo possui massa desprezível e pode ser comprimida ou esticada. A extremidade esquerda da mola é mantida fixa e sua extremidade direita está presa ao corpo. A força da mola é a única força horizontal que atua sobre o corpo; a força vertical normal sempre anula a força gravitacional.

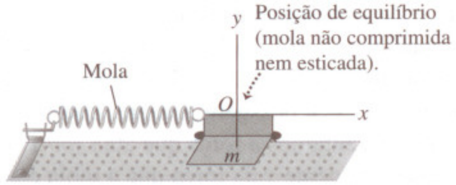


Figura 13.1 Um sistema que pode ter movimento periódico.

É mais simples definir o sistema de coordenadas com a origem O na posição de equilíbrio para a qual a mola não está esticada nem comprimida. Então x fornece o componente x do vetor **deslocamento** do corpo a partir da posição de equilíbrio e também indica a variação de comprimento da mola. O componente x da aceleração a_x é dado por $a_x = F_x/m$.

A Figura 13.2 mostra diagramas do corpo livre para as três diferentes posições da mola. Quando o corpo é deslocado da posição de equilíbrio da mola, a força da mola tende a fazer o corpo voltar para a posição de equilíbrio. Chamamos essa força de **força restauradora**. Uma oscilação ocorre somente quando existe uma força restauradora que obriga o sistema a voltar para a sua posição de equilíbrio.

Vamos analisar como as oscilações ocorrem nesse sistema. Quando deslocamos o corpo para a direita até a posição $x = A$ e a seguir o libertamos, a força resultante e a aceleração são orientadas para a esquerda (Figura 13.2a). A velocidade aumenta até o corpo atingir a posição de equilíbrio O. Quando o corpo está no ponto O, a força resultante que atua sobre ele é igual a zero; mas devido ao seu movimento, ele *ultrapassa* a posição de equilíbrio. No outro lado da posição de equilíbrio, a velocidade do corpo está orientada para a esquerda, porém sua aceleração está orientada para a direita (Figura 13.2c); conseqüentemente, a velocidade diminui até o corpo parar. Mostraremos mais adiante que, no caso da mola ideal, o corpo pára no ponto $x = -A$. A seguir o corpo acelera para a direita, ultrapassa novamente a posição de equilíbrio e pára no ponto $x = A$, pronto para repetir todo o processo. O corpo está oscilando! Caso não existisse atrito nem outra força capaz de remover a energia mecânica do sistema, esse movimento se repetiria eternamente; a força restauradora obrigaria sempre o corpo a voltar para a sua posição de equilíbrio e todas as vezes ele ultrapassaria essa posição.

Em cada caso, a força pode depender do deslocamento x de diferentes modos. Entretanto, as oscilações *sempre* ocorrem quando existe uma força *restauradora* que obriga o sistema a voltar para a sua posição de equilíbrio.

Período, freqüência e freqüência angular

A seguir definimos alguns termos que serão usados na discussão de todos os tipos de movimentos periódicos.

A **amplitude** do movimento, designada por A, é o módulo máximo do vetor deslocamento do corpo a partir

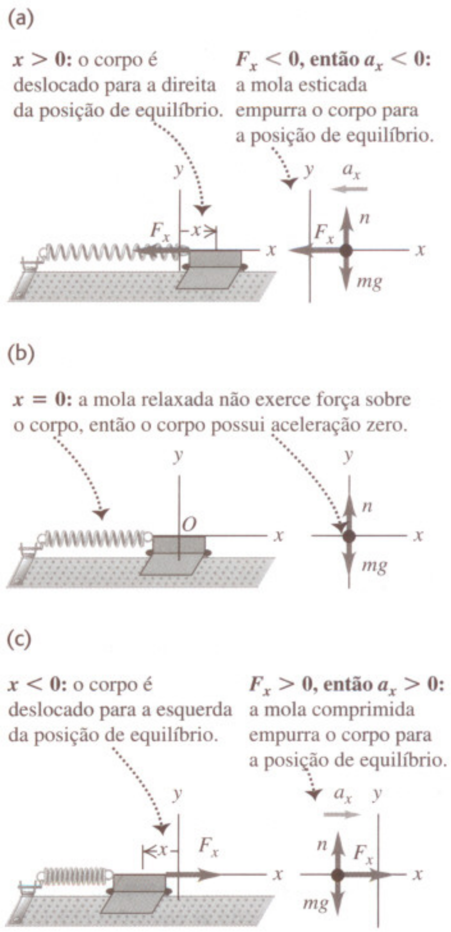


Figura 13.2 Exemplo de um movimento periódico. Quando o corpo é deslocado de sua posição de equilíbrio em $x = 0$, a mola exerce uma força restauradora que o leva de volta à posição de equilíbrio.

da posição de equilíbrio; isto é, o valor máximo de $|x|$. Ela é sempre positiva. Quando a mola da Figura 13.2 for ideal, a amplitude total do movimento será $2A$. A unidade SI de A é o metro. O **ciclo** é uma oscilação completa, digamos de A até $-A$ e retornando ao ponto A, ou de O até A, de volta a O, seguindo até $-A$ e retornando a O. Note que o movimento de uma extremidade a outra (digamos, de A até $-A$) constitui um hemiciclo e não um ciclo completo.

O **período**, T, é o tempo correspondente a um ciclo. Ele é sempre positivo. A unidade SI é o segundo, porém algumas vezes ele é expresso em 'segundos por ciclo'.

A **freqüência**, f, é o número de ciclos na unidade de tempo. Ela é sempre positiva. A unidade SI de freqüência é o hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Essa unidade foi assim designada em homenagem ao físico alemão Heinrich Hertz (1857–1894), um pioneiro nas investigações das ondas eletromagnéticas.

A **freqüência angular**, ω, é 2π vezes a freqüência:

$$\omega = 2\pi f$$

Em breve veremos porque ω é uma grandeza útil. Ela representa uma taxa de variação de uma grandeza angular (não necessariamente relacionada ao movimento de rotação) que é sempre medida em radianos, portanto ela possui unidades de rad/s. Uma vez que f é em ciclo/s, podemos interpretar o fator 2π como se tivesse unidade de rad/ciclo.

Pelas definições do período T e da freqüência f, vemos que cada uma dessas grandezas é o inverso da outra:

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \quad \text{(relações entre freqüência e período)} \qquad (13.1)$$

Além disso, da definição de ω,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(freqüência angular)} \qquad (13.2)$$

Exemplo 13.1

Um transdutor ultra-sônico (uma espécie de alto-falante), usado para diagnóstico médico, oscila com uma freqüência igual a 6,7 MHz = $6{,}7 \times 10^6$ Hz. Quanto dura uma oscilação e qual é a freqüência angular?

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis procuradas são o período T e a freqüência angular ω.

PREPARAR: temos a freqüência f, portanto podemos achar as variáveis que desejamos usando as equações (13.1) e (13.2).

EXECUTAR: usando as equações (13.1) e (13.2), obtemos

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6{,}7 \times 10^6\ \text{Hz}} = 1{,}5 \times 10^{-7}\ \text{s} = 0{,}15\ \mu\text{s}$$

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = 2\pi(6{,}7 \times 10^6\ \text{Hz}) \\ &= (2\pi\ \text{rad/ciclo})(6{,}7 \times 10^6\ \text{ciclo/s}) \\ &= 4{,}2 \times 10^7\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

AVALIAR: trata-se de uma vibração muito rápida, com valores elevados de f e ω e um valor pequeno para T. Em uma vibração lenta , f e ω são pequenos, e T é elevado.

Teste sua compreensão da Seção 13.1 Um corpo como o mostrado na Figura 13.2 oscila para a frente e para trás. Para cada um dos seguintes valores da velocidade v_x, e da aceleração a_x do corpo ao longo do eixo Ox, diga se o deslocamento x é positivo, negativo ou zero. (a) $v_x > 0$ e $a_x > 0$; (b) $v_x > 0$ e $a_x < 0$; (c) $v_x < 0$ e $a_x > 0$; (d) $v_x < 0$ e $a_x < 0$; (e) $v_x = 0$ e $a_x < 0$; (f) $v_x > 0$ e $a_x = 0$. ∎

13.2 Movimento harmônico simples

O tipo mais simples de oscilação ocorre quando a força restauradora F_x é *diretamente proporcional* ao deslocamento x da posição de equilíbrio. Isso ocorre quando a mola das figuras 13.1 e 13.2 é ideal, ou seja, quando ela obedece à lei de Hooke. A constante de proporcionalidade k entre F_x e x é a constante da força ou constante k da mola. (Talvez você queira rever a lei de Hooke e a definição da constante da mola na Seção 6.3.) Nos dois lados da posição de equilíbrio, F_x e x possuem sempre sinais opostos. Na Seção 6.3 representamos a força que atua *sobre* a mola por $F_x = kx$. O componente x da força que a mola exerce *sobre o corpo* possui esse mesmo módulo, porém com sinal contrário, logo o componente x da força F_x que a mola exerce sobre o corpo é

$$F_x = -kx \quad \text{(força restauradora exercida pela mola ideal)} \qquad (13.3)$$

Essa relação fornece corretamente o módulo e o sinal da força, independentemente do valor de x ser positivo, negativo ou nulo. A constante da mola k é sempre positiva e suas unidades são N/m ou kg/s^2. Supondo que não exista atrito, a Equação (13.3) fornece a força *resultante* sobre o corpo.

Quando a força restauradora é diretamente proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio, conforme indicado na Equação (13.3), a oscilação denomina-se **movimento harmônico simples**, abreviado por **MHS**. A aceleração $a_x = d^2x/dt^2 = F_x/m$ de um corpo que executa um MHS é dada por

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \text{(movimento harmônico simples)} \qquad (13.4)$$

O sinal negativo indica que a aceleração possui sempre sentido contrário ao do deslocamento. Essa aceleração *não* é constante, portanto nem pense em usar as fórmulas deduzidas no Capítulo 2 (*Física I*) para o movimento com aceleração constante. Brevemente mostraremos como resolver essa equação para encontrar o deslocamento x em função do tempo. Um corpo que executa um movimento harmônico simples constitui um **oscilador harmônico**.

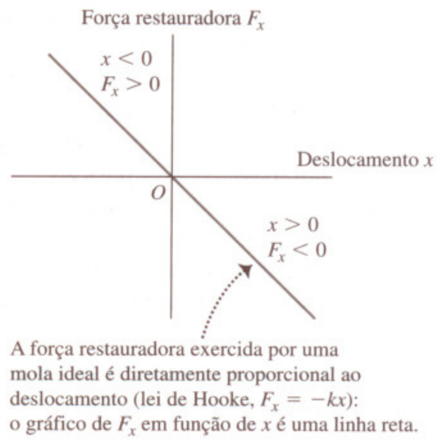


Figura 13.3 Uma mola ideal exerce uma força restauradora que obedece à lei de Hooke, $F_x = -kx$. Uma oscilação com uma força restauradora desse tipo é chamada de movimento harmônico simples.

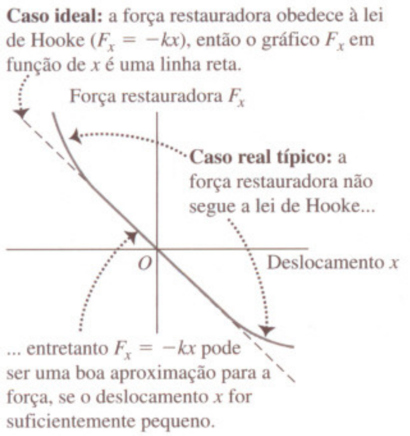


Figura 13.4 Em muitas oscilações reais, a lei de Hooke se aplica desde que o corpo não se afaste muito da posição de equilíbrio. Em tal caso, as oscilações de pequena amplitude podem ser consideradas aproximadamente como harmônicas simples.

Por que o movimento harmônico simples é tão importante? Não se esqueça de que nem todos os movimentos periódicos constituem um movimento harmônico simples; em movimentos periódicos em geral, a força restauradora depende do deslocamento de modo mais complicado do que o indicado na Equação (13.3). Contudo, em muitos sistemas a força restauradora é *aproximadamente* proporcional ao deslocamento no caso de ele ser suficientemente pequeno (Figura 13.4). Ou seja, no caso de uma amplitude suficientemente pequena, as oscilações do sistema constituem aproximadamente um movimento harmônico simples que pode ser descrito pela Equação (13.4). Logo, podemos notar que o MHS é um modelo simples para descrever diversos tipos de movimentos periódicos, tais como a vibração de um cristal de quartzo em um relógio, o movimento de um diapasão, a corrente elétrica em um circuito de corrente alternada e as vibrações dos átomos nas moléculas e nos sólidos.

Movimento circular e as equações do movimento harmônico simples

Para explorar as propriedades do movimento harmônico simples, devemos representar a distância x do corpo que oscila em função do tempo, $x(t)$. A segunda derivada dessa função, d^2x/dt^2, deve ser igual a $(-k/m)$ multiplicada pela própria função, conforme exigido pela Equação (13.4). Como já dissemos, as fórmulas deduzidas na Seção 2.4 não servem para este caso, porque a aceleração varia constantemente à medida que x varia. Em vez disso, deduziremos uma expressão para $x(t)$ usando uma impressionante semelhança entre o MHS e um outro movimento que já estudamos em detalhe.

A Figura 13.5a mostra a vista do topo de um disco horizontal de raio A com uma bola presa em sua periferia no ponto Q. O disco gira com velocidade angular ω constante (dada em rad/s), de modo que a bola gira com movimento circular uniforme. Um feixe de luz horizontal ilumina o disco que gira e projeta sua sombra sobre uma tela. A sombra do ponto P oscila para a frente e para trás enquanto a bola percorre a circunferência. Agora colocamos um corpo na extremidade de uma mola ideal, como indicado nas figuras 13.1 e 13.2, de modo que o corpo oscile paralelamente à direção do deslocamento da sombra. Mostraremos que o movimento desse corpo e o movimento da sombra são *idênticos* quando a amplitude do movimento do corpo é igual ao raio A do disco, e que a freqüência angular $2\pi f$ do corpo oscilante é igual à velocidade angular ω do disco que gira. Ou seja, *o movimento harmônico simples é a projeção de um movimento circular uniforme sobre um diâmetro do círculo.*

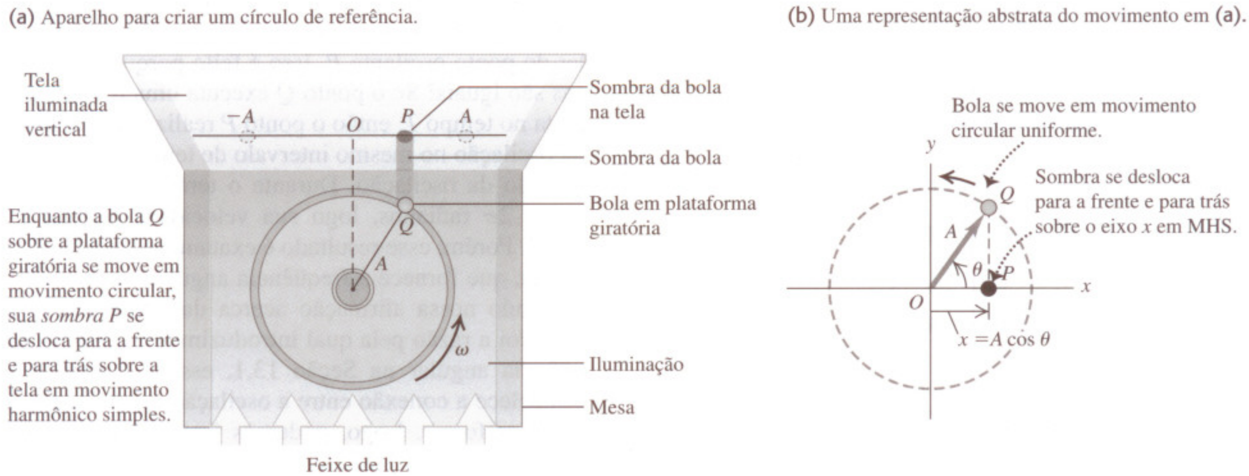


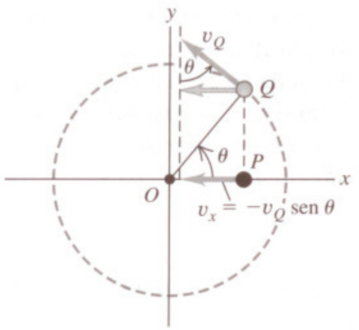
Figura 13.5 (a) Relacionando o movimento circular uniforme e o movimento harmônico simples. (b) A sombra da bola se move exatamente como um corpo oscilando em uma mola ideal.

Podemos verificar essa importante conclusão determinando a aceleração da sombra no ponto P e comparando o resultado com a aceleração de um corpo que executa um MHS, dada a Equação (13.4). O círculo, ao longo do qual a bola se move de modo que sua projeção se superpõe à do movimento oscilatório do corpo, denomina-se **círculo de referência**; chamaremos o ponto Q de *ponto de referência*. Consideramos o círculo de referência contido em um plano xy, com a origem O no centro do círculo (Figura 13.5b). No instante t, o vetor OQ que liga a origem ao ponto Q faz um ângulo θ com o sentido positivo do eixo Ox. À medida que o ponto Q percorre o círculo de referência com velocidade angular ω constante, o vetor OQ gira com a mesma velocidade angular. Esse vetor girante denomina-se **fasor**. (Esse termo era usado muito antes do termo 'phaser' ter sido popularizado pelo seriado 'Jornada nas Estrelas' como o nome de uma arma paralisante. O método dos fasores é útil em diversas partes da física. Utilizaremos fasores ao estudarmos circuitos de corrente alternada no Capítulo 31 — *Física III* — e ao analisarmos a interferência da luz nos capítulos 35 e 36 — *Física IV*.)

O componente x do fasor no instante t nada mais é do que a coordenada x do ponto Q:

$$x = A\cos\theta \tag{13.5}$$

(a) Usando o círculo de referência para determinar a velocidade ao longo do eixo Ox do ponto P.



(b) Usando o círculo de referência para determinar a aceleração ao longo do eixo Ox do ponto P.

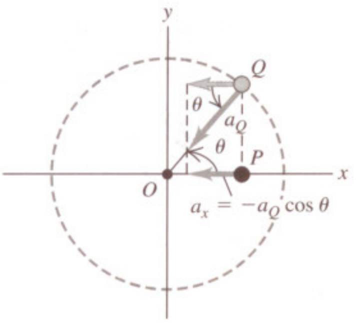


Figura 13.6 A (a) velocidade e (b) a aceleração da sombra da bola P (veja a Figura 13.5) são os componentes x respectivamente dos vetores velocidade e aceleração da bola Q.

Essa relação também fornece a coordenada x da sombra P, que é a *projeção* do ponto Q sobre o eixo Ox. Portanto, a velocidade da sombra P ao longo do eixo Ox é igual ao componente x do vetor velocidade do ponto de referência Q (Figura 13.6a) e a aceleração da sombra P ao longo do eixo Ox é igual ao componente x do vetor aceleração do ponto de referência Q (Figura 13.6b). Visto que o ponto Q possui movimento circular uniforme, o vetor aceleração $\vec{a}_Q$ está sempre orientado para o ponto O. Além disso, o módulo de $\vec{a}_Q$ é constante e dado pelo quadrado da velocidade angular multiplicado pelo raio do círculo (ver a Seção 9.3):

$$a_Q = \omega^2 A \tag{13.6}$$

A Figura 13.6b mostra que o componente x de $\vec{a}_Q$ é dado por $a_x = -a_Q\cos\theta$. Combinando esse resultado com as equações (13.5) e (13.6), obtemos a aceleração do ponto P na forma

$$a_x = -a_Q\cos\theta = -\omega^2 A\cos\theta \quad \text{ou} \tag{13.7}$$

$$a_x = -\omega^2 x \tag{13.8}$$

A aceleração do ponto P é diretamente proporcional ao deslocamento x e possui sempre sentido contrário a ele. Essas são precisamente as características básicas do movimento harmônico simples.

A Equação (13.8) é *exatamente* igual à Equação (13.4), que fornece a aceleração de um movimento harmônico simples, desde que a velocidade angular ω do ponto de referência Q esteja relacionada à constante da mola k e à massa m do corpo que oscila por

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.9}$$

Temos usado o mesmo símbolo ω para a *velocidade* angular do ponto de referência Q e para a *freqüência* angular do ponto oscilante P. Isso é feito porque essas grandezas são iguais! Se o ponto Q executa uma revolução completa no tempo T, então o ponto P realiza o ciclo completo da oscilação no mesmo intervalo de tempo; portanto, T é o período da oscilação. Durante o tempo T, o ponto Q se move 2π radianos, logo sua velocidade angular é $\omega = 2\pi/T$. Porém, esse resultado é exatamente igual à Equação (13.2), que fornece a freqüência angular do ponto P, confirmando nossa afirmação acerca da interpretação de ω. Essa foi a razão pela qual introduzimos o conceito de freqüência angular na Seção 13.1, essa é a grandeza que estabelece a conexão entre a oscilação e o movimento circular uniforme. Logo, podemos interpretar novamente a Equação (13.9) como uma relação para a freqüência angular de um corpo de massa m que executa um movimento harmônico simples sobre o qual atua uma força restauradora com uma constante da mola k:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimento harmônico simples)} \qquad (13.10)$$

Quando você inicia um corpo oscilando em MHS, não é você quem escolhe o valor de ω; ele é predeterminado pelos valores de k e de m. As unidades de k são N/m ou kg/s^2, logo k/m possui unidades de (kg/s^2)/kg = s^{-2}. Quando extraímos a raiz quadrada da Equação (13.10), obtemos s^{-1} ou, mais apropriadamente, rad/s, porque se trata de uma freqüência *angular* (lembre-se de que radiano não é uma unidade verdadeira).

De acordo com as equações (13.1) e (13.2), a freqüência f e o período T são

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimento harmônico simples)} \qquad (13.11)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(movimento harmônico simples)} \qquad (13.12)$$

Com a Equação (13.12) notamos que para um corpo de massa m maior, com maior inércia, a aceleração é menor; ele se move mais lentamente e leva um tempo maior para completar um ciclo (Figura 13.7). Em contraste, quando a mola é mais dura (possuindo um valor elevado da constante da mola k), a força exercida é maior para a mesma deformação x, produzindo aceleração mais elevada, velocidade maior e um tempo T menor por ciclo.

ATENÇÃO Não confunda freqüência e freqüência angular Você poderá se atrapalhar caso não saiba a diferença entre a freqüência f e a freqüência angular $\omega = 2\pi f$. A freqüência informa o número de ciclos por segundo, enquanto a freqüência angular informa o número de radianos por segundo correspondente ao círculo de referência. Ao resolver um problema, verifique cuidadosamente se o objetivo é achar f ou ω.

Período e amplitude no MHS

As equações (13.11) e (13.12) mostram que o período e a freqüência do movimento harmônico simples são completamente determinados pela massa m e pela constante da mola k. *No movimento harmônico simples, o período e a freqüência não dependem da amplitude A.* Para dados valores de k e de m, o tempo de uma oscilação completa não depende do fato de a amplitude ser pequena ou grande. A Equação (13.3) mostra por que essa conclusão deveria ser esperada. Um valor maior de A implica também uma força restauradora maior, porque $|x|$ é maior. Isso faz aumentar a velocidade média ao longo de um ciclo completo, compensando a distância maior a ser percorrida e resultando no mesmo tempo total.

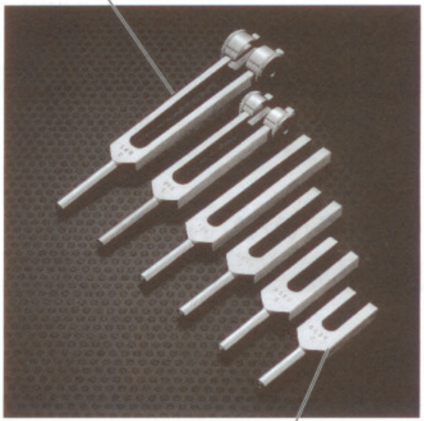


Figura 13.7 Quanto maior a massa m de cada dente do garfo do diapasão, menor será a freqüência da oscilação, $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$.

As vibrações de um diapasão constituem aproximadamente um movimento harmônico simples, o que significa que sua freqüência não depende de sua amplitude. Essa é a razão pela qual o diapasão é usado como padrão para identificar a altura de um som musical. Se não fosse por essa característica do movimento harmônico simples, seria impossível fazer os relógios mecânicos e eletrônicos que conhecemos funcionarem com precisão, ou tocar a maior parte dos instrumentos musicais de modo afinado. Quando você encontrar um corpo oscilando com um período que *dependa* da amplitude, a oscilação *não* corresponderá a um movimento harmônico simples.

Exemplo 13.2

FREQÜÊNCIA, FREQÜÊNCIA ANGULAR E PERÍODO NO MHS A extremidade esquerda de uma mola horizontal é mantida fixa. Ligamos um dinamômetro na extremidade livre da mola e puxamos para a direita (Figura 13.8a); verificamos que a força que estica a mola é proporcional ao deslocamento e que uma força de 6,0 N produz um deslocamento igual a 0,030 m. A seguir removemos o dinamômetro e amarramos a extremidade livre a um corpo de 0,50 kg, puxamos o corpo até uma distância de 0,020 m, o libertamos e observamos o MHS resultante (Figura 13.8b). a) Calcule a constante da mola. b) Calcule a freqüência, a freqüência angular e o período da oscilação.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como a força da mola (igual em módulo à força que estica a mola) é proporcional ao deslocamento, o movimento é harmônico simples.

PREPARAR: encontramos o valor da constante da mola k usando a lei de Hooke, Equação (13.3), e os valores de ω, f e T por meio das equações (13.10), (13.11) e (13.12), respectivamente.

EXECUTAR: a) Quando x = 0,030 m, a força que a mola exerce sobre o dinamômetro é F = – 6,0 N. Usando a Equação (13.3),

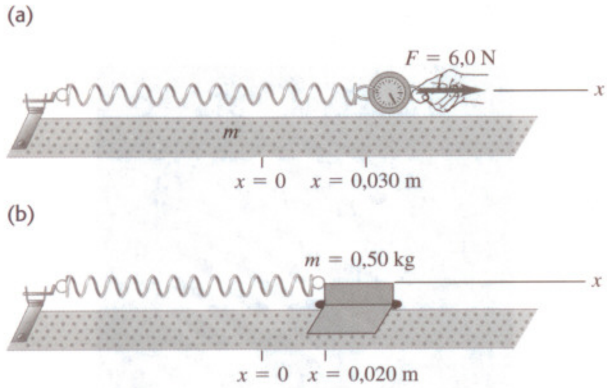


Figura 13.8 (a) A força exercida *sobre* a mola (indicada pelo vetor $\vec{F}$) possui um componente no eixo Ox igual a $F_x + 6{,}0$ N. A força exercida *pela* mola possui um componente no eixo Ox é igual a $F_x - 6{,}0$ N. (b) Um corpo é preso à mesma mola e pode oscilar livremente.

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{-6{,}0\ \text{N}}{0{,}030\ \text{m}} = 200\ \text{N/m} = 200\ \text{kg/s}^2$$

(b) Substituindo $m = 0{,}50$ kg na Equação (13.10), encontramos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\ \text{kg/s}^2}{0{,}50\ \text{kg}}} = 20\ \text{rad/s}$$

A freqüência f é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/ciclo}} = 3{,}2\ \text{ciclo/s} = 3{,}2\ \text{Hz}$$

O período T é o inverso da freqüência f_x:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3{,}2\ \text{ciclo/s}} = 0{,}31\ \text{s}$$

O período é geralmente expresso em 'segundos' em vez de 'segundos por ciclo'.

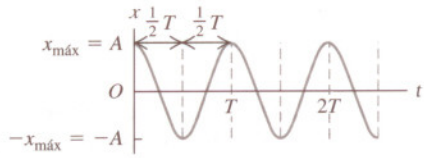


Figura 13.9 Gráfico de x em função de t [(ver Equação (13.13)] em um movimento harmônico simples. No caso mostrado, $\phi = 0$.

AVALIAR: a amplitude da oscilação é igual a 0,020 m, que corresponde à deformação inicial da mola quando puxamos o corpo para a direita antes de libertá-lo. Não precisamos usar essa informação para achar a freqüência, a freqüência angular e o período, porque em um MHS nenhuma dessas grandezas depende da amplitude.

Deslocamento, velocidade e aceleração no MHS

Precisamos achar o deslocamento x em função do tempo para um oscilador harmônico. A Equação (13.4) para um corpo que descreve um movimento harmônico simples ao longo do eixo Ox é idêntica à Equação (13.8) para a coordenada x de um ponto de referência que descreve um movimento circular uniforme com uma velocidade angular constante dada por $\omega = \sqrt{k/m}$. Da Equação (13.5), vemos que $x = A \cos \theta$ descreve a coordenada x em ambas as situações. Se em $t = 0$ o fator OQ faz um ângulo ϕ com o sentido positivo do eixo Ox, então para qualquer outro instante posterior t esse ângulo é dado por $\theta = \omega t + \phi$. Substituindo na Equação (13.5), obtemos

$$x = A \cos (\omega t + \phi) \quad \text{(deslocamento no MHS)} \qquad (13.13)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$. A Figura 13.9 mostra um gráfico da Equação (13.13) para o caso particular $\phi = 0$. O deslocamento x é uma função periódica do tempo, conforme seria de se esperar em um MHS. Mediante a relação $\cos \alpha = \text{sen}(\alpha + \pi/2)$, poderíamos também ter escrito a Equação (13.13) em termos de uma função senoidal em vez de usar o co-seno. *No movimento harmônico simples, o deslocamento é uma função do tempo senoidal periódica.* Existem muitas funções periódicas, contudo nenhuma delas é tão simples quanto uma função seno ou co-seno.

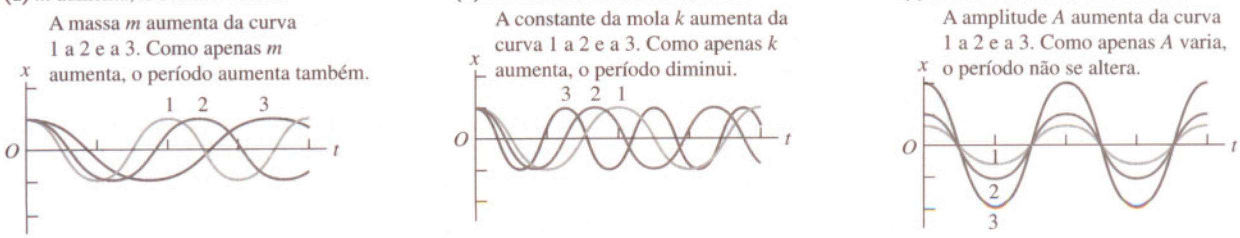


Figura 13.10 Variações em um movimento harmônico simples. Todos os casos indicados são para $\phi = 0$.

Essas três curvas mostram MHS com o mesmo período T e amplitude A, mas com ângulos ϕ de fase diferentes.

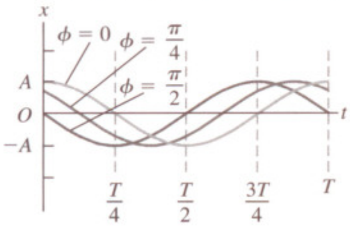


Figura 13.11 Variações do MHS: deslocamento em função do tempo para o mesmo oscilador harmônico com diferentes ângulos ϕ de fase.

O valor da função co-seno está sempre compreendido entre –1 e +1. Assim, na Equação (13.13), o valor de x está sempre entre $-A$ e $+A$, o que confirma que A é a amplitude do movimento. O período T corresponde ao tempo de um ciclo completo da oscilação. A função co-seno se repete todas as vezes que a quantidade entre parênteses na Equação (13.13) aumenta de 2π radianos. Logo, se começamos no instante $t = 0$, o tempo T necessário para completar um ciclo é dado por

$$\omega T = \sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \qquad \text{ou} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

que é exatamente a Equação (13.12). Fazendo-se variar m ou k, o período da oscilação varia, conforme indicado nas figuras 13.10a e 13.10b.

A constante ϕ indicada na Equação (13.13) denomina-se **ângulo de fase**. Ela nos informa em que ponto do ciclo o movimento se encontrava em $t = 0$ (equivalente a dizer em que ponto da circunferência estava o ponto Q em $t = 0$). Vamos designar por x_0 a posição em $t = 0$. Substituindo $t = 0$ e $x = x_0$ na Equação (13.13), obtemos

$$x_0 = A\cos\phi \tag{13.14}$$

Se $\phi = 0$, então $x_0 = A\cos 0 = A$, e o corpo começa em seu deslocamento positivo máximo. Se $\phi = \pi$, então $x_0 = A\cos\pi = -A$, e o corpo começa em seu deslocamento *negativo* máximo. Se $\phi = \pi/2$, então $x_0 = A\cos(\pi/2) = 0$, e o corpo está inicialmente na origem. A Figura 13.11 mostra o deslocamento x em função do tempo para diferentes ângulos de fase.

Achamos a velocidade v_x e a aceleração a_x em função do tempo para um movimento harmônico simples derivando a Equação (13.13) em relação ao tempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$
(velocidade no MHS) (13.15)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$
(aceleração no MHS) (13.16)

A velocidade v_x oscila entre os valores $v_{\text{máx}} = +\omega A$ e $-v_{\text{máx}} = -\omega A$, e a aceleração a_x oscila entre os valores $a_{\text{máx}} = +\omega^2 A$ e $-a_{\text{máx}} = -\omega^2 A$ (Figura 13.12). Comparando a Equação (13.16) com a Equação (13.13) e lembrando da Equação (13.9) em que $\omega^2 = k/m$, vemos que

$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

que é exatamente a Equação (13.4) do movimento harmônico simples. Isso confirma a validade da Equação (13.13) para x em função do tempo.

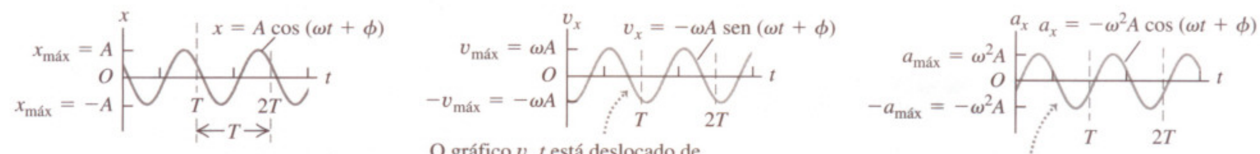
Na realidade, já havíamos deduzido a Equação (13.16) de forma geométrica considerando o componente x do vetor aceleração do ponto de referência Q. Isso foi feito na Figura 13.6b e na Equação (13.7) (lembre-se de que $\theta = \omega t + \phi$). Do mesmo modo, poderíamos ter deduzido a Equação (13.15) tomando o componente x do vetor velocidade de Q, conforme indicado na Figura 13.6b. Deixaremos os detalhes para você resolver (ver o Problema 13.85).

Note que o gráfico senoidal do deslocamento em função do tempo (Figura 13.12a) está deslocado em um quarto de período em relação ao gráfico da velocidade em função do tempo (Figura 13.12b) e em meio período do gráfico da

(a) Deslocamento x em função do tempo t.

(b) Velocidade v_x em função do tempo t.

(c) Aceleração a_x em função do tempo t.



O gráfico v_x-t está deslocado de $\frac{1}{4}$ de ciclo em relação ao gráfico $x - t$.

O gráfico a_x–t está deslocado de $\frac{1}{4}$ de ciclo em relação ao gráfico v_x–t e de $\frac{1}{2}$ ciclo em relação ao gráfico $x - t$.

Figura 13.12 Gráficos de (a) x em função de t, (b) v_x em função de t e (c) a_x em função de t para um corpo em MHS. Para o movimento descrito nestes gráficos, $\phi = \pi/3$.

aceleração em função do tempo (Figura 13.12c). A Figura 13.3 mostra por que isso acontece. Quando o corpo está passando pela posição de equilíbrio, de modo que seu deslocamento é igual a zero, sua velocidade será $v_{máx}$ ou $-v_{máx}$ (dependendo do sentido do movimento do corpo) e sua aceleração é igual a zero. Quando o corpo está no seu ponto de deslocamento máximo, $x = +A$, ou no seu ponto de deslocamento negativo máximo, $x = -A$, sua velocidade é nula, e o corpo fica momentaneamente em repouso. Nesses pontos, a força restauradora $F_x = -kx$ e a aceleração do corpo possuem os módulos máximos. Em $x = +A$, a aceleração é negativa e igual $-a_{máx}$. Em $x = -A$, a aceleração é positiva: $a_x = a_{máx}$.

Conhecendo-se a posição inicial x_0 e a velocidade inicial v_{0x} de um corpo oscilante, podemos determinar a amplitude A e a fase ϕ. Vejamos como fazer isso. A velocidade inicial v_{0x} é a velocidade no tempo $t = 0$; substituindo $v_x = v_{0x}$ e $t = 0$ na Equação (13.15), temos

$$v_{0x} = -\omega A \text{ sen } \phi \qquad (13.17)$$

Para achar ϕ, divida a Equação (13.17) pela Equação (13.14). Essa divisão elimina A, e a seguir podemos explicitar ϕ:

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A \operatorname{sen}\phi}{A\cos\phi} = -\omega \operatorname{tg}\phi$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) \qquad \text{(ângulo de fase no MHS)} \quad (13.18)$$

Também é fácil achar A quando conhecemos x_0 e v_{0x}. Vamos esquematizar a dedução e você acrescentará os detalhes. Eleve ao quadrado a Equação (13.14); divida a Equação (13.17) por ω, eleve o resultado ao quadrado e some com o quadrado da Equação (13.14). O membro direito será igual a $A^2(\text{sen}^2\,\phi + \cos^2\phi)$, que é igual a A^2. O resultado final é

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^{\,2}}{\omega^2}} \quad \text{(amplitude no MHS)} \qquad (13.19)$$

Note que, quando o corpo apresenta tanto uma posição inicial x_0 quanto uma velocidade inicial v_{0x} diferente de zero, a amplitude A *não* é igual ao deslocamento inicial. Isso é razoável; se o corpo está na posição inicial positiva x_0 e você fornece a ele uma velocidade inicial v_{0x} positiva, ele deverá ir *além* do ponto x_0 antes de parar e retornar.

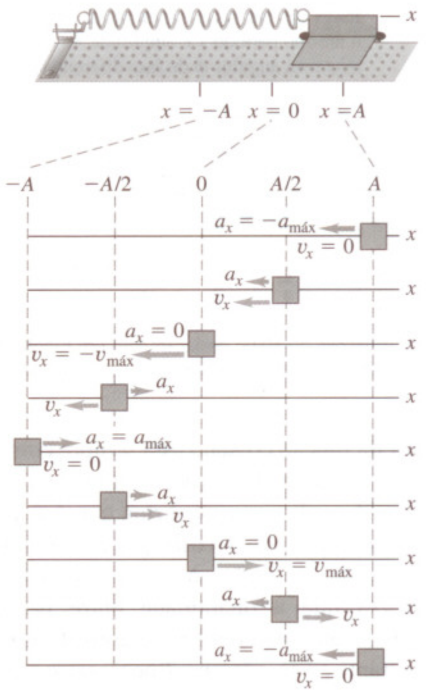


Figura 13.13 Como a velocidade v_x e a aceleração a_x ao longo do eixo *Ox* variam durante um ciclo de MHS.

Estratégia para a solução de problemas 13.1

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES I: DESCREVENDO O MOVIMENTO

IDENTIFICAR *os conceitos relevantes*. Um sistema em oscilação: está em movimento harmônico simples (MHS) *apenas* se a força restauradora for diretamente proporcional ao deslocamento. Certifique-se de ser esse o caso do problema em questão antes de tentar usar qualquer das equações desta seção. Como sempre, identifique as variáveis procuradas.

PREPARAR *o problema* seguindo estes passos:

1. Identifique as grandezas conhecidas e as grandezas ignoradas, e verifique quais são as variáveis que se deseja encontrar.
2. É útil distinguir entre dois tipos de grandezas. As *propriedades físicas básicas* do sistema incluem a massa m e a constante da mola k, assim como as grandezas derivadas a partir de m e k, como o período T, a freqüência f e a freqüência angular ω. *As propriedades físicas do movimento* descrevem como o sistema se comporta quando é colocado em movimento de certa maneira e incluem a amplitude A, a velocidade máxima $v_{máx}$ e o ângulo de fase f, assim como os valores do deslocamento x, da velocidade v_x e da aceleração a_x em um dado instante.
3. Se necessário, defina um eixo Ox como na Figura 13.13, com a posição de equilíbrio em $x = 0$.

EXECUTAR *a solução* como segue:

1. Use as equações dadas nas seções 13.1 e 13.2 para encontrar as variáveis procuradas.
2. Se você precisar calcular o ângulo de fase, expresse-o em radianos. A grandeza ωt na Equação (13.13) está em radianos, então ϕ também precisa estar.
3. Se você precisar encontrar os valores do deslocamento x, da velocidade v_x e da aceleração a_x em diversos tempos, use as equações (13.13), (13.15) e (13.16), respectivamente. Se tanto a posição inicial x_0 quanto a velocidade inicial v_{0x} forem dadas, você pode calcular o ângulo de fase e a amplitude com as equações (13.18) e (13.19). Se o corpo apresentar um deslocamento inicial positivo x_0, mas uma velocidade inicial nula ($v_{0x} = 0$), então a amplitude é $A = x_0$ e o ângulo de fase é $\phi = 0$. Se o corpo tiver uma posição inicial nula ($x_0 = 0$) e uma velocidade inicial v_{0x} positiva, então a amplitude é dada por $A = v_{0x}/\omega$, e o ângulo de fase é $\phi = -\pi/2$.

AVALIAR *sua resposta:* Confira os seus resultados para ter certeza de que são coerentes. Por exemplo, suponha que você tenha usado a posição inicial e a velocidade para encontrar expressões gerais para x e v_x no tempo t. Se você substituir o valor de t fazendo $t = 0$ nessas expressões, você deve retornar aos valores corretos de x_0 e v_{0x}.

Exemplo 13.3

DESCREVENDO UM MHS

Vamos retornar à mola horizontal discutida no Exemplo 13.2. A constante da mola é $k = 200$ N/m, e a mola está ligada a um corpo de massa $m = 0{,}50$ kg. Desta vez, forneceremos ao corpo um deslocamento inicial de +0,015 m e uma velocidade inicial de +0,40 m/s. a) Calcule o período, a amplitude e o ângulo de fase do movimento. b) Escreva equações para o deslocamento, a velocidade e a aceleração em função do tempo.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como no Exemplo 13.2, as oscilações são um MHS e podemos usar as expressões deduzidas nesta seção.

PREPARAR: o problema fornece os valores de k, m, x_0 e v_{0x}. Com esses valores, podemos calcular as variáveis procuradas T, A e ϕ, e as expressões para x, v_x e a_x em função do tempo.

EXECUTAR: a) O período é exatamente igual ao obtido no Exemplo 13.2, $T = 0{,}31$ s. Em um movimento harmônico simples o período não depende da amplitude, somente dos valores de k e de m. No Exemplo 13.2, descobrimos que $\omega = 20$ rad/s. Logo, conforme a Equação (13.19),

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} \\ &= \sqrt{(0{,}015\ \text{m})^2 + \frac{(0{,}40\ \text{m/s})^2}{(20\ \text{rad/s})^2}} \\ &= 0{,}025\ \text{m} \end{aligned}$$

Para achar o ângulo de fase ϕ, usamos a Equação (13.18):

$$\begin{aligned} \phi &= \text{arctg}\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) \\ &= \text{arctg}\left(-\frac{0{,}40\ \text{m/s}}{(20\ \text{rad/s})(0{,}015\ \text{m})}\right) = -53° = -0{,}93\ \text{rad} \end{aligned}$$

b) O deslocamento, a velocidade e a aceleração em qualquer instante são dados pelas equações (13.13), (13.15) e (13.16), respectivamente. Substituindo os valores, obtemos

$$\begin{aligned} x &= (0{,}025\ \text{m})\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0{,}93\ \text{rad}] \\ v_x &= -(0{,}50\ \text{m/s})\,\text{sen}[(20\ \text{rad/s})t - 0{,}93\ \text{rad}] \\ a_x &= -(10\ \text{m/s}^2)\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0{,}93\ \text{rad}] \end{aligned}$$

A velocidade varia senoidalmente entre –0,50 m/s e +0,50 m/s, e a aceleração varia senoidalmente entre –10 m/s^2 e +10 m/s^2.

AVALIAR: é possível verificar os resultados de x e v_x em função do tempo fazendo $t = 0$ e calculando o resultado. Você deve obter $x = x_0 = 0{,}015$ m e $v_x = v_{0x} = 0{,}40$ m/s. Confere?

Teste sua compreensão da Seção 13.2 Um corpo está preso a uma mola, como mostra a Figura 13.13. Se o corpo é deslocado para $x = 10{,}0$ m e liberado a partir do repouso no tempo $t = 0$, ele irá oscilar com amplitude $A = 0{,}10$ m e ângulo de fase $\phi = 0$. (a) Suponha agora que em $t = 0$ o corpo esteja em $x = 0{,}10$ m e movendo-se para a direita, conforme a Figura 13.13. Nessas condições, a amplitude é maior, menor ou igual, se comparada ao valor anterior de 0,10 m? E o ângulo de fase é maior do que zero, menor do que zero ou igual a zero? (b) Suponha, desta vez, que em $t = 0$ o corpo esteja em $x = 0{,}10$ m e movendo-se para a esquerda, conforme a Figura 13.13. Nessas condições, a amplitude é maior, menor ou igual, se comparada ao valor anterior de 0,10 m? E o ângulo de fase é maior do que zero, menor do que zero ou igual a zero? ∎

13.3 Energia no movimento harmônico simples

Podemos aprender ainda mais sobre o movimento harmônico simples levando em conta aspectos relacionados à energia. Observe novamente o corpo oscilando na extremidade da mola nas figuras 13.2 e 13.13. Já dissemos que a força da mola é a única força horizontal que atua sobre o corpo. A força que a mola ideal exerce sobre um corpo é uma força conservativa, e as forças verticais não realizam trabalho, de modo que a energia mecânica total do sistema é *conservada.* Vamos também supor que a massa da mola seja desprezível.

A energia cinética do corpo é dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, e a energia potencial da mola é $U = \frac{1}{2}kx^2$, tal como na Seção 7.2. (Seria útil fazer uma revisão dessa seção.) Não existe nenhuma força dissipativa realizando trabalho, logo a energia mecânica total $E = K + U$ é conservada:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \tag{13.20}$$

A energia mecânica total E é também relacionada diretamente com a amplitude A do movimento. Quando o corpo atinge o ponto $x = A$, seu deslocamento máximo a partir do ponto de equilíbrio, ele pára momentaneamente e depois retorna ao seu ponto de equilíbrio. Ou seja, quando $x = A$ (ou $x = -A$), $v_x = 0$. Nesse ponto a energia é inteiramente potencial, e $E = \frac{1}{2}kA^2$. Como E é constante, ela permanece sempre igual a $\frac{1}{2}kA^2$ em qualquer outro ponto. Combinando essa expressão com a Equação (13.20), obtemos

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante}$$

(energia mecânica total no MHS) (13.21)

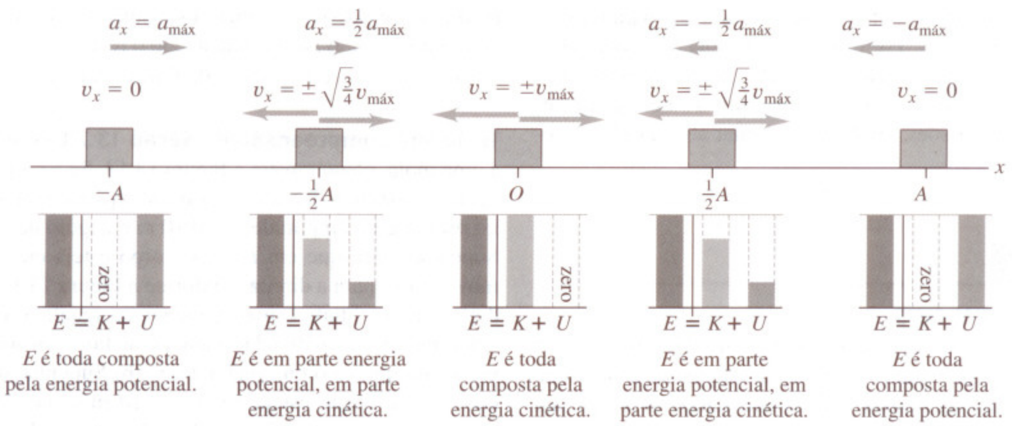


Figura 13.14 Gráficos de *E*, *K* e *U* em função do deslocamento em MHS. A velocidade do corpo *não* é constante, portanto essas imagens do corpo em posições com intervalos espaciais iguais entre si *não* estão colocadas em intervalos iguais no tempo.

Podemos verificar essa equação substituindo x e v_x fornecidos pelas equações (13.13) e (13.15), e usando a relação $\omega^2 = k/m$ da Equação (13.9):

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{2}m[-\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)]^2 + \frac{1}{2}k[A\cos(\omega t + \phi)]^2 \\
&= \frac{1}{2}kA^2\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}kA^2
\end{aligned}
$$

(Lembre que $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.) Portanto, as nossas expressões para o deslocamento e para a velocidade no movimento harmônico simples são consistentes com a conservação da energia, como era de se esperar.

Podemos usar a Equação (13.21) para explicitar a velocidade v_x do corpo em função do deslocamento x:

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (13.22)$$

O sinal ± significa que, em um dado ponto x, o corpo pode estar se deslocando em qualquer um dos dois sentidos. Por exemplo, quando $x = \pm A/2$, temos

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - \left(\pm\frac{A}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{k}{m}}A$$

A Equação (13.22) também mostra que a velocidade *máxima* $v_{máx}$ ocorre em $x = 0$. Usando a Equação (13.10), $\omega = \sqrt{k/m}$, verificamos que

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A \qquad (13.23)$$

Esse resultado concorda com a Equação (13.15), a qual indica que v_x oscila entre $-\omega A$ e $+\omega A$.

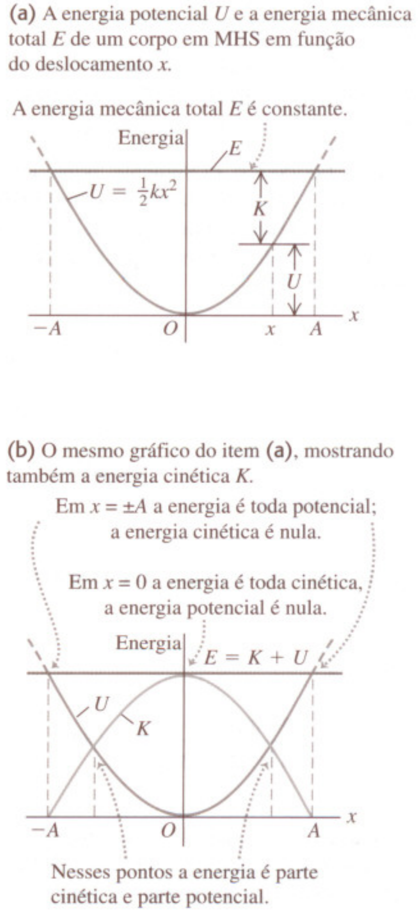


Figura 13.15 Energia cinética *K*, energia potencial *U* e energia mecânica total *E* em função da posição no MHS. Em cada ponto *x* a soma dos valores de *K* e de *U* é sempre igual ao valor constante *E*. Você consegue demonstrar que a energia é em parte cinética e em parte potencial em $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}A$?

Interpretando E, K e U em MHS

A Figura 13.14 mostra as energias E, K e U para os pontos $x = 0$, $x = \pm A/2$ e $x = \pm A$. A Figura 13.15 é uma representação gráfica da Equação (13.21); o eixo vertical indica a energia (cinética, potencial e total) e a posição x é indicada no eixo horizontal. A curva parabólica mostrada na Figura 13.15a representa a energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. A linha horizontal representa a energia mecânica total E que permanece constante e não varia com a posição x. Essa linha corta a curva da energia potencial nos pontos $x = -A$ e $x = A$, nos quais a energia é totalmente potencial, a energia cinética é nula e o corpo entra momentaneamente em repouso antes de inverter o sentido. Enquanto o corpo oscila entre $-A$ e A, a energia é continuamente transformada de potencial em cinética e vice-versa.

A Figura 13.15a mostra a conexão entre a amplitude A e a correspondente energia mecânica total $E = \frac{1}{2}kA^2$. Se tentássemos fazer x maior do que A (ou menor do que $-A$), U seria maior do que E, e K seria negativa. Porém, K nunca pode ser negativa, logo x não pode ser maior do que A nem menor do que $-A$.

Estratégia para a solução de problemas 13.2

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES II: ENERGIA A equação para a energia, Equação (13.21), fornece uma relação alternativa útil entre a velocidade e a posição, especialmente quando grandezas energéticas são também solicitadas. Caso o problema envolva uma relação entre a velocidade, a posição e a aceleração sem fazer referência ao tempo, em geral é mais fácil usar a Equação (13.4) (segunda lei de Newton) ou a Equação (13.21) (conservação da energia) do que usar as relações gerais de x, v_x e a_x em função do tempo [dadas, respectivamente, pelas equações (13.13), (13.15) e (13.16)]. Como a equação da energia envolve x^2 e v_x^2, ela não lhe diz qual é o sinal de x nem de v_x; você terá de achar o sinal para cada situação. Por exemplo, se o corpo for deslocado da sua posição de equilíbrio para o ponto de seu deslocamento positivo máximo, então x é positivo e v_x também é positiva.

Exemplo 13.4

VELOCIDADE, ACELERAÇÃO E ENERGIA EM UM MHS
Na oscilação discutida no Exemplo 13.2, $k = 200$ N/m, $m = 0{,}50$ kg e o corpo que oscila é solto a partir do repouso no ponto $x = 0{,}020$ m. a) Ache a velocidade máxima e a velocidade mínima atingidas pelo corpo que oscila. b) Ache a aceleração máxima. c) Calcule a velocidade e a aceleração quando o corpo está na metade da distância entre o ponto de equilíbrio e seu afastamento máximo. d) Ache a energia mecânica total, a energia potencial e a energia cinética nesse ponto.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o problema trata do movimento em diversas *posições*, não em *tempos* específicos. Esse é um indício de que você pode usar as relações de energia vistas nesta seção para encontrar as variáveis pedidas.

PREPARAR: a Figura 13.13 mostra a escolha do eixo Ox. O deslocamento máximo a partir da posição de equilíbrio é $A = 0{,}020$ m. Para qualquer posição x, usamos as equações (13.22) e (13.4) para achar a velocidade v_x e a aceleração a_x, respectivamente. Dadas a velocidade e a posição, usamos a Equação (13.21) para encontrar o valor das energias K, U e E.

EXECUTAR: a) velocidade v_x em função do deslocamento x é dada pela Equação (13.22):

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

A velocidade máxima ocorre no ponto em que o corpo está se deslocando da esquerda para a direita, passando por sua posição de equilíbrio, onde $x = 0$:

$$v_x = v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0{,}50\ \text{kg}}}(0{,}020\ \text{m}) = 0{,}40\ \text{m/s}$$

A velocidade mínima (ou seja, a mais negativa) ocorre quando o corpo está se deslocando da direita para a esquerda e passa pelo ponto em que $x = 0$; seu valor é $-v_{\text{máx}} = -0{,}40$ m/s.

b) Pela Equação (13.4),

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

A aceleração máxima (mais positiva) ocorre no ponto correspondente ao maior valor negativo de x, ou seja, para $x = -A$; logo

$$a_{\text{máx}} = -\frac{k}{m}(-A) = -\frac{200\ \text{N/m}}{0{,}50\ \text{kg}}(-0{,}020\ \text{m}) = 8{,}0\ \text{m/s}^2$$

A aceleração mínima (ou seja, a mais negativa) é igual a $-8{,}0$ m/s^2 e ocorre no ponto $x = +A = +0{,}020$ m.

c) Em um ponto na metade da distância entre o ponto de equilíbrio e o afastamento máximo, $x = A/2 = 0{,}010$ m. Pela Equação (13.22),

$$v_x = -\sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0{,}50\ \text{kg}}}\sqrt{(0{,}020\ \text{m})^2 - (0{,}010\ \text{m})^2} = -0{,}35\ \text{m/s}$$

Escolhemos a raiz quadrada negativa porque o corpo está se deslocando de $x = A$ até o ponto $x = 0$. Pela Equação (13.4),

$$a_x = -\frac{200\ \text{N/m}}{0{,}50\ \text{kg}}(0{,}010\ \text{m}) = -4{,}0\ \text{m/s}^2$$

Nesse ponto, a velocidade e a aceleração possuem o mesmo sinal, logo a velocidade está crescendo. As condições nos pontos $x = 0$, $x = \pm A/2$ e $x = \pm A$ são indicadas na Figura 13.14.

d) A energia total possui o mesmo valor para todos os pontos durante o movimento:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0{,}020\ \text{m})^2 = 0{,}040\ \text{J}$$

A energia potencial é

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0{,}010\ \text{m})^2 = 0{,}010\ \text{J}$$

e a energia cinética é

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}(0{,}50\ \text{kg})(-0{,}35\ \text{m/s})^2 = 0{,}030\ \text{J}$$

AVALIAR: nesse ponto $x = A/2$, a energia E é composta por $\frac{1}{4}$ de energia potencial e por $\frac{3}{4}$ de energia cinética. Você pode verificar isso observando a Figura 13.15b.

Exemplo 13.5

ENERGIA E MOMENTO LINEAR NO MHS

Um bloco de massa M preso a uma mola de constante k descreve um movimento harmônico simples horizontal com uma amplitude de A_1. No instante em que o bloco passa pela posição de equilíbrio, um pedaço de massa de vidraceiro, de massa m, cai verticalmente de uma pequena altura sobre o bloco e gruda nele. a) Calcule a nova amplitude e o período. b) Repita a parte (a) supondo que a massa caia sobre o bloco no momento em que ele está na extremidade de sua trajetória.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: o problema envolve o movimento em uma dada posição, e não em dado instante, portanto podemos usar o método da energia. Antes de a massa cair sobre o bloco, a energia mecânica da mola e do bloco oscilantes era constante. Quando a massa gruda no bloco, a colisão é completamente inelástica (ver a Seção 8.3); existe conservação do componente x do momento linear, porém a energia cinética diminui. Depois que a colisão termina, a energia mecânica permanece constante em um novo valor.

PREPARAR: a Figura 13.16 mostra nossos esboços. Em cada parte, consideramos o que acontece antes, durante e depois da colisão. Encontramos a amplitude A_2 depois da colisão a partir da energia final do sistema, e encontramos o período T_2 após a colisão usando a relação entre período e massa.

EXECUTAR: a) Antes da colisão, a energia mecânica total da mola e do bloco é dada por $E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$. Como o bloco está na posição de equilíbrio, $U = 0$, a energia é puramente cinética (Figura 13.16a). Designando por v_1 a velocidade do bloco na posição de equilíbrio, obtemos

$$E_1 = \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \quad \text{então} \quad v_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}A_1$$

Durante a colisão existe conservação do componente x do momento linear do sistema massa e bloco. (Por quê?) Imediatamente antes da colisão, esse momento linear é dado pela soma de Mv_1 (para o bloco) e zero (para a massa). Imediatamente depois da colisão, o bloco e a massa se movem juntos com velocidade v_2, e o momento linear desse conjunto é dado por $(M + m)v_2$. Pela lei da conservação do momento linear, obtemos

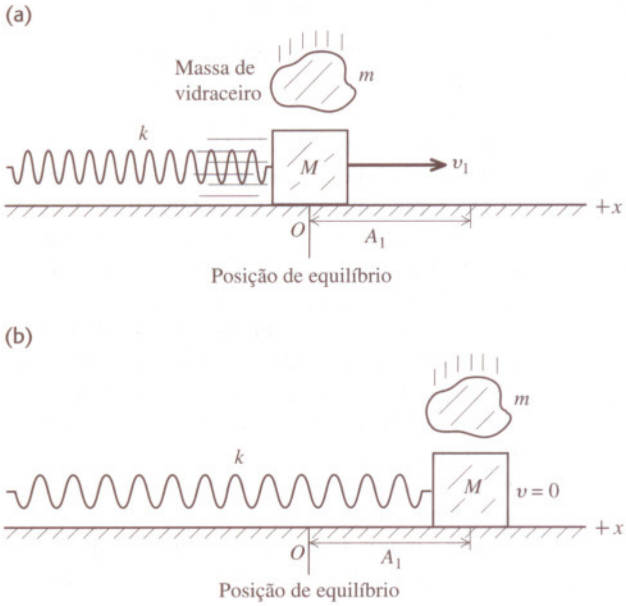


Figura 13.16 Nossos esboços para este problema.

$$Mv_1 + 0 = (M + m)v_2 \quad \text{então} \quad v_2 = \frac{M}{M + m}v$$

A colisão dura um intervalo de tempo muito pequeno, de modo que imediatamente depois da colisão o bloco e a massa se encontram ainda na posição de equilíbrio. A energia ainda é puramente cinética, porém é *menor* do que a energia cinética antes da colisão:

$$E_2 = \frac{1}{2}(M + m)v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{M + m}v_1^2 = \frac{M}{M + m}\left(\frac{1}{2}Mv_1^2\right)$$
$$= \left(\frac{M}{M + m}\right)E_1$$

Como E_2 é igual a $\frac{1}{2}kA_2^2$, onde A_2 é a amplitude depois da colisão, temos

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \left(\frac{M}{M + m}\right)\frac{1}{2}kA_1^2$$
$$A_2 = A_1\sqrt{\frac{M}{M + m}}$$

Quanto maior for o valor de m da massa de vidraceiro, menor será a amplitude final.

O cálculo do período da oscilação depois da colisão é fácil. Usando a Equação (13.12), obtemos

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M + m}{k}}$$

b) Quando a massa de vidraceiro cai sobre o bloco, ele está momentaneamente em repouso (Figura 13.16b). O componente x do momento linear é zero tanto antes quanto depois da colisão.

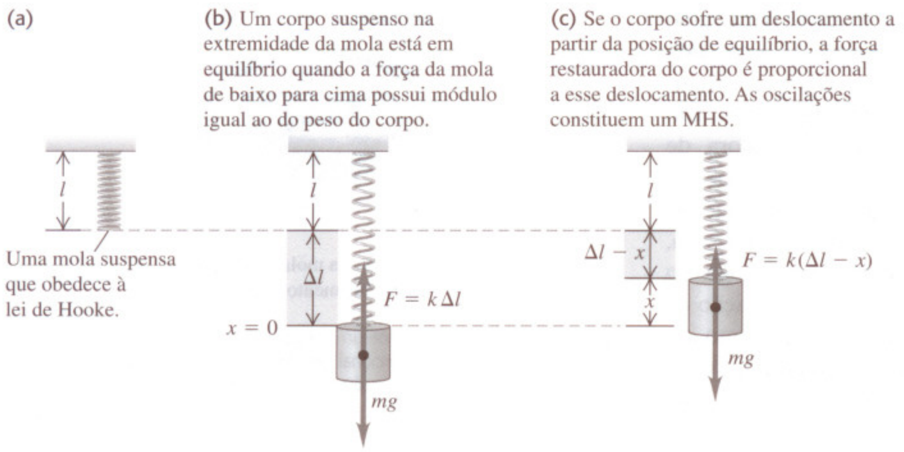


Figura 13.17 Um corpo suspenso na extremidade de uma mola.

O bloco possuía energia cinética zero imediatamente antes da colisão; a massa e o bloco possuem energia cinética zero imediatamente depois da colisão. A energia toda é composta de energia potencial armazenada na mola, portanto o acréscimo da massa de vidraceiro não exerce *nenhum efeito* sobre a energia mecânica. Ou seja,

$$E_2 = E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$$

e a amplitude não se altera após a colisão ($A_2 = A_1$). O período, entretanto, continua variando quando a massa é grudada no bloco; o seu valor não depende do modo pelo qual a massa é adicionada ao sistema; depende apenas do valor da massa total. Logo, T_2 é igual ao obtido na parte (a), $T_2 = 2\pi\sqrt{(M + m)/k}$.

AVALIAR: Por que a energia é perdida na parte (a) mas não na parte (b)? A diferença é que, na parte (a), a massa de vidraceiro desliza contra o bloco em movimento durante a colisão, e a energia é dissipada por atrito cinético.

Teste sua compreensão da Seção 13.3 a) Para dobrar a energia total em um sistema massa-mola que oscila em MHS, de que fator deve a amplitude aumentar? (i) 4; (ii) 2; (iii) $\sqrt{2} = 1.414$; (iv) $\sqrt[4]{2} = 1.189$. b) De que fator irá variar a freqüência devido a esse aumento na amplitude? (i) 4; (ii) 2; (iii) $\sqrt{2} = 1.414$; (iv) $\sqrt[4]{2} = 1.189$; (v) não se altera. ▮

13.4 Aplicações do movimento harmônico simples

Até o momento, analisamos muitos exemplos de uma *única* situação em que ocorre o movimento harmônico simples (MHS): o caso da mola horizontal ideal ligada a um corpo. Porém, o MHS pode ocorrer em qualquer sistema no qual exista uma força restauradora diretamente proporcional ao deslocamento a partir da posição de equilíbrio, como na Equação (13.3), $F_x = -kx$. A força restauradora pode surgir de diferentes modos em situações variadas, então a constante k dessa força deve ser achada mediante o conhecimento da força resultante que atua sobre o sistema. Depois dessa determinação, torna-se fácil achar a freqüência angular ω_x, a freqüência f e o período T: basta substituir o valor obtido para k nas equações (13.10), (13.11) e (13.12). Vamos usar esse procedimento para examinar diversos exemplos de movimento harmônico simples.

MHS na direção vertical

Suponha que penduremos um corpo de massa m em uma mola suspensa verticalmente de constante k (Figura 13.17a). As oscilações agora ocorrem na direção vertical; elas ainda constituem um MHS? Na Figura 13.17b o corpo está suspenso na mola em equilíbrio. Nessa posição, a mola está esticada de um valor Δl suficiente para que a força vertical da mola sobre o corpo $k\,\Delta l$ equilibre o peso do corpo mg:

$$k\,\Delta l = mg$$

Considere $x = 0$ a posição de equilíbrio e oriente o sentido positivo do eixo Ox de baixo para cima. Quando o corpo está a uma distância x *acima* da posição de equilíbrio (Figura 13.17c), a deformação da mola é $\Delta l - x$. Logo, a força de baixo para cima exercida pela mola sobre o corpo é $k(\Delta l - x)$, e o componente x da força total resultante sobre o corpo é

$$F_x = k(\Delta l - x) + (-mg) = -kx$$

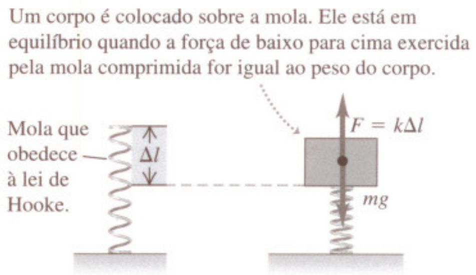


Figura 13.18 Quando o peso mg comprime a mola até uma distância Δl, a constante da mola é dada por $k = mg/\Delta l$ e a freqüência angular do MHS vertical é dada por $\omega = \sqrt{k/m}$ — a mesma que o corpo apresentaria se estivesse suspenso na mola (veja a Figura 13.17).

ou seja, uma força resultante orientada de cima para baixo de módulo igual a kx. Analogamente, quando o corpo está *abaixo* da posição de equilíbrio, existe uma força resultante orientada de baixo para cima de módulo igual a kx. Em qualquer dos casos, existe uma força restauradora de módulo igual a kx. Quando o corpo se move verticalmente, ele oscila em MHS com a mesma freqüência angular que teria caso estivesse oscilando na horizontal, $\omega = \sqrt{k/m}$. Portanto, o MHS vertical é essencialmente análogo ao MHS horizontal. A única diferença real é que a posição de equilíbrio (ponto $x = 0$) não corresponde mais ao ponto em que a mola não está deformada. O raciocínio anterior também vale quando um corpo com peso mg é colocado verticalmente sobre uma mola (Figura 13.18) e a comprime até uma distância Δl.

Exemplo 13.6

MHS VERTICAL EM UM CARRO VELHO

Os amortecedores de um carro velho de 1000 kg estão completamente gastos. Quando uma pessoa de 980 N sobe lentamente no centro de gravidade do carro, ele se abaixa 2,8 cm. Quando essa pessoa está dentro do carro durante uma colisão com um obstáculo, o carro oscila verticalmente com MHS. Considerando o carro e a pessoa uma única massa apoiada sobre uma única mola, calcule o período e a freqüência da oscilação.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a situação é semelhante à mostrada na Figura 13.18.

PREPARAR: a compressão da mola quando o peso adicional é acrescentado nos mostra a constante da mola, que podemos usar para achar o período e a freqüência (as variáveis procuradas).

EXECUTAR: quando a força aumenta de 980 N, a mola sofre uma compressão adicional de 0,028 m e a coordenada x do carro varia em –0,028 m. Portanto, a constante da mola efetiva (incluindo o efeito da suspensão toda) é

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{980\ \text{N}}{-0{,}028\ \text{m}} = 3{,}5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2$$

A massa da pessoa é p/g = (980 N)/(9,8 m/s^2) = 100 kg. A massa *total* que oscila é m = 1000 kg + 100 kg = 1100 kg. O período T é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1100\ \text{kg}}{3{,}5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2}} = 1{,}11\ \text{s}$$

e a freqüência é

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}11\ \text{s}} = 0{,}90\ \text{Hz}$$

AVALIAR: uma oscilação persistente com um período de cerca de um segundo não é nada agradável. O propósito dos amortecedores é fazer com que tais oscilações sejam reduzidas (veja a Seção 13.7).

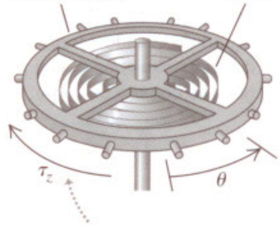


Figura 13.19 A roda catarina de um relógio mecânico. A mola helicoidal exerce um torque restaurador proporcional ao deslocamento angular θ a partir da posição de equilíbrio. Logo, o movimento é um MHS.

MHS angular

A Figura 13.19 mostra a roda catarina de um relógio mecânico. A roda possui um momento de inércia I em torno de seu eixo. Uma mola helicoidal (chamada de *mola cabelo*) exerce um torque restaurador τ_z proporcional ao deslocamento angular θ a partir da posição de equilíbrio. Escrevemos $\tau_z = -\kappa\theta$, onde κ (letra grega 'capa') é uma constante denominada *constante de torção*. Usando o análogo rotacional da segunda lei de Newton para um corpo rígido, $\Sigma\tau_z = I\alpha_z = Id^2\theta/dt^2$, a equação do movimento é

$$-\kappa\theta = I\alpha \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

Essa equação possui forma exatamente igual à da Equação (13.4), que fornece a aceleração de um movimento harmônico simples, se substituirmos x por θ e k/m por κ/I. Logo, trata-se da forma *angular* do movimento harmônico simples. A freqüência angular ω e a freqüência f são dadas, respectivamente, pelas equações (13.10) e (13.11), fazendo-se as mesmas substituições mencionadas:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad \text{(MHS angular)} \tag{13.24}$$

O movimento é descrito pela função

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \phi)$$

onde Θ desempenha o papel de uma amplitude angular.

É vantajoso que a oscilação de uma roda catarina *seja* um movimento harmônico simples. Caso não fosse, a freqüência dependeria da amplitude, e o relógio poderia adiantar ou atrasar quando a mola se desgastasse.

*Vibrações das moléculas

O estudo que faremos a seguir sobre as vibrações das moléculas usa o teorema binomial. Caso você não esteja familiarizado com esse teorema, consulte a seção adequada em seu livro de matemática.

Quando dois átomos estão separados por uma distância da ordem de alguns diâmetros atômicos, eles exercem entre si uma força de atração. Porém, quando eles estão suficientemente próximos, de modo que haja superposição entre suas respectivas nuvens eletrônicas, as forças entre os átomos passam a ser repulsivas. Entre essas duas situações extremas, pode existir uma posição de equilíbrio, na qual os dois átomos constituem uma *molécula*. Quando esses átomos são ligeiramente deslocados das suas posições de equilíbrio, eles começam a oscilar. Vamos verificar se essas oscilações podem constituir um movimento harmônico simples.

Como exemplo, consideraremos um tipo de força entre átomos conhecida como *interação de van der Waals.* No momento, nosso objetivo específico é estudar oscilações, por isso não forneceremos detalhes acerca do processo dessas interações. Suponha que o centro de massa de um dos átomos seja a origem e que o centro do outro átomo esteja a uma distância r (Figura 13.20a); a distância de equilíbrio entre os centros é dada por $r = R_0$. A experiência mostra que a interação de van der Waals pode ser descrita pela seguinte função de energia potencial

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right] \qquad (13.25)$$

onde U_0 é uma constante com unidade de joule. Quando a distância entre os dois átomos for muito grande, $U = 0$; quando a separação entre os dois átomos for igual à distância de equilíbrio $r = R_0$, $U = -U_0$. A força sobre o segundo átomo é obtida pela derivada negativa da Equação (13.25),

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^{6}}{r^{7}}\right] \\ &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right] \end{aligned} \qquad (13.26)$$

As figuras 13.20b e 13.20c indicam, respectivamente, a energia potencial e a força em função da distância. A força é positiva para $r < R_0$ e negativa para $r > R_0$; logo, ela é uma força *restauradora.*

Para estudar a força F_r na Equação (13.26), vamos definir uma variável x para descrever o deslocamento a partir do equilíbrio:

$$x = r - R_0, \text{ logo } r = R_0 + x$$

Em termos de x, a força F_r na Equação (13.26) é dada por

$$\begin{aligned} F_r &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{7}\right] \\ &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1+x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1+x/R_0)^{7}}\right] \end{aligned} \qquad (13.27)$$

Essa força não se parece em nada com a lei de Hooke, $F_x = -kx$, de modo que poderíamos ser induzidos a pensar que as oscilações moleculares não constituem um MHS. Porém, vamos restringir nosso estudo a oscilações com *pequenas amplitudes,* de modo que o módulo do deslocamento x seja pequeno em comparação com R_0 e o módulo da razão x/R_0 seja muito menor do que 1. Podemos então simplificar a Equação (13.27) usando o *teorema binomial:*

$$\begin{aligned} (1+u)^n &= 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \cdots \end{aligned} \qquad (13.28)$$

Quando $|u|$ for muito menor do que 1, cada termo sucessivo da Equação (13.28) é muito menor do que o termo precedente, e podemos aproximar com segurança $(1+u)^n$ usando apenas os dois primeiros termos do desen-

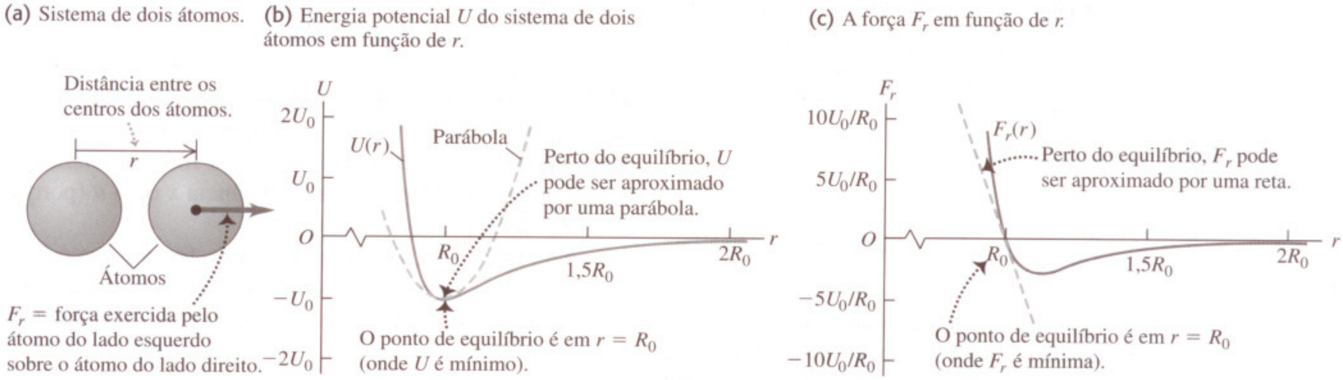


Figura 13.20 (a) Dois átomos com os centros separados por uma distância r. (b) Energia potencial U da interação de van der Waals em função de r. (c) A força F_r sobre o átomo do lado direito em função de r.

volvimento. Na Equação (13.27), substituindo u por x/R_0 e fazendo n igual a –13 ou –7, obtemos

$$\frac{1}{(1 + x/R_0)^{13}} = (1 + x/R_0)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{(1 + x/R_0)^{7}} = (1 + x/R_0)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

$$F_r \approx 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x \qquad (13.29)$$

Essa é precisamente a lei de Hooke, com a constante da força dada por $k = 72U_0/R_0^2$. (Note que k apresenta as unidades corretas J/m^2 ou N/m.) Logo, as oscilações das moléculas ligadas pela interação de van der Waals podem constituir um movimento harmônico simples, desde que a amplitude seja pequena em comparação a R_0, de modo que seja válida a aproximação $|x/R_0| << 1$ usada na dedução da Equação (13.29).

Podemos também mostrar que a energia potencial U na Equação (13.25) pode ser escrita como $U \approx \frac{1}{2}kx^2 + C$, onde $C = -U_0$ e k é novamente igual a $72U_0/R_0^2$. Quando se adiciona uma constante, a energia potencial não se altera fisicamente, portanto o sistema constituído por duas massas é essencialmente semelhante ao sistema da massa ligada a uma mola horizontal, cuja energia potencial é dada por $U = \frac{1}{2}kx^2$. Deixamos a demonstração a seu encargo, como exercício. (Ver Exercício 13.39.)

Exemplo 13.7

VIBRAÇÃO MOLECULAR

Dois átomos de argônio podem formar uma molécula fracamente ligada, Ar_2, que é mantida unida pela interação de van der Waals com $U_0 = 1{,}68 \times 10^{-21}$ J e $R_0 = 3{,}82 \times 10^{-10}$m. Calcule a freqüência das pequenas oscilações dos átomos em torno da posição de equilíbrio.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: esta é a mesma situação mostrada na Figura 13.20.

PREPARAR: como as oscilações são pequenas, podemos usar a Equação (13.11) para obter a freqüência do MHS. A constante da mola é dada pela Equação (13.29).

EXECUTAR: a constante da mola é

$$k = \frac{72U_0}{R_0^2} = \frac{72(1{,}68 \times 10^{-21}\,\text{J})}{(3{,}82 \times 10^{-10}\,\text{m})^2} = 0{,}829\ \text{J/m}^2 = 0{,}829\ \text{N/m}$$

Ela é comparável à constante da força de uma mola frouxa, tal como as molas usadas em brinquedos do tipo 'mola maluca'.

Pela tabela periódica dos elementos (Apêndice D), a massa atômica média do argônio é

$$(39{,}948\ \text{u})(1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg/1 u}) = 6{,}63 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Quando um dos átomos de argônio está fixo e o outro oscila, a freqüência das oscilações é

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0{,}829\ \text{N/m}}{6{,}63 \times 10^{-26}\ \text{kg}}} = 5{,}63 \times 10^{11}\ \text{Hz}$$

A massa que oscila é muito pequena, portanto mesmo uma mola frouxa pode produzir oscilações muito rápidas.

AVALIAR: nossa resposta para f não é muito correta. Quando não existe nenhuma força externa atuando sobre a molécula, o centro de massa da molécula (localizado na metade da distância entre os dois átomos) não acelera. Para garantir isso, *os dois* átomos oscilam com a mesma amplitude em sentidos opostos. Podemos dar conta dessa questão substituindo m por $m/2$ na equação de f. (Veja o Problema 13.86.) Isso faz f aumentar de um fator $\sqrt{2}$, logo, $f = \sqrt{2}(5{,}63 \times 10^{11}\ \text{Hz}) = 7{,}96 \times 10^{11}$ Hz. Uma complicação adicional ocorre porque, na escala atômica, para descrever oscilações e outros movimentos, devemos usar a *mecânica quântica,* e não a mecânica newtoniana. Felizmente, a freqüência possui o mesmo valor na mecânica quântica.

Teste sua compreensão da Seção 13.4 Um bloco suspenso em uma mola ideal oscila para cima e para baixo com um período igual a 10 s sobre a Terra. Se você levar o bloco e a mola para Marte, onde a aceleração da gravidade é apenas 40% da aceleração da gravidade na Terra, qual será o novo período da oscilação? (i) 10 s; (ii) mais de 10 s; (iii) menos de 10 s. ∎

13.5 O pêndulo simples

Um **pêndulo simples** é um modelo idealizado constituído por um corpo puntiforme suspenso por um fio inextensível de massa desprezível. Quando o corpo puntiforme é puxado lateralmente a partir da sua posição de equilíbrio e a seguir libertado, ele oscila em torno da posição de equilíbrio. Algumas situações familiares, como uma bola de demolição presa ao cabo de um guindaste ou uma criança sentada em um balanço (Figura 13.21a), podem ser consideradas pêndulos simples.

A trajetória do corpo puntiforme (algumas vezes chamado de peso) não é uma linha reta, mas um arco de circunferência de raio L igual ao comprimento do fio (Figura 13.21b). Usaremos como coordenada a distância x medida ao longo do arco. Para que a oscilação seja um movimento harmônico simples é necessário que a força restauradora seja diretamente proporcional à distância x ou a θ (porque $x = L\theta$). Será que isso está correto?

Na Figura 13.21b, representamos a força sobre o peso em termos do componente radial e do componente tangencial. A força restauradora F é o componente tangencial da força resultante:

$$F_\theta = -mg\,\text{sen}\,\theta \qquad (13.30)$$

(a) Um pêndulo real.

(b) Um pêndulo ideal simples.

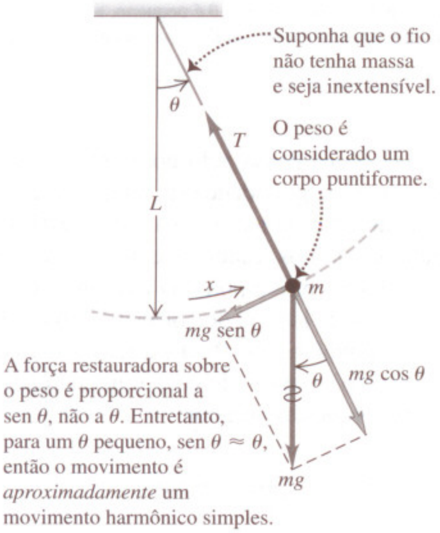


Figura 13.21 A dinâmica de um pêndulo simples.

A força restauradora é fornecida pela gravidade; a tensão T atua meramente para fazer o peso puntiforme se deslocar ao longo de um arco. A força restauradora *não* é proporcional a θ, mas sim a sen θ; logo, o movimento não é harmônico simples. Contudo, quando o ângulo θ é pequeno, sen θ é aproximadamente igual ao ângulo θ em radianos (Figura 13.22). Por exemplo, quando $\theta = 0{,}1$ rad (aproximadamente igual a 6º), sen $\theta = 0{,}0998$, uma diferença de apenas 0,2%. Com essa aproximação, podemos escrever a Equação (13.30) na forma

$$F_\theta = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} \qquad \text{ou}$$

$$F_\theta = -\frac{mg}{L}x \tag{13.31}$$

A força restauradora é então proporcional à coordenada para *pequenos deslocamentos*, e a constante da força é dada por $k = mg/L$. Pela Equação (13.10), a freqüência

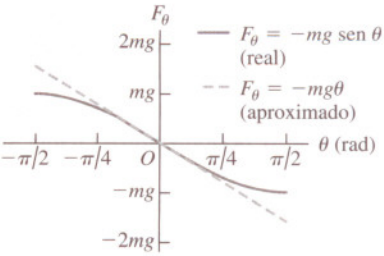


Figura 13.22 Em deslocamentos angulares pequenos θ, a força restauradora $F_\theta = -mg$ sen θ sobre um pêndulo simples é aproximadamente igual a $-mg\ \theta$, isto é, é aproximadamente proporcional ao deslocamento θ. Assim, para ângulos pequenos, as oscilações são movimentos harmônicos simples.

angular ω de um pêndulo simples com amplitude pequena é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(pêndulo simples, amplitude pequena)} \tag{13.32}$$

A freqüência e o período correspondentes são dados por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(pêndulo simples, amplitude pequena)} \tag{13.33}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(pêndulo simples, amplitude pequena)} \tag{13.34}$$

Note que as relações anteriores não envolvem a *massa* da partícula. Isso ocorre porque a força restauradora, que é um componente do peso da partícula, é proporcional a m. Logo, a massa é cancelada porque aparece em *ambos* os membros da equação $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. (Esse raciocínio físico é o mesmo usado para mostrar que todos os corpos caem com a mesma aceleração no vácuo.) Em pequenas oscilações, o período de um pêndulo simples para um dado valor de g é determinado exclusivamente pelo seu comprimento.

A dependência de L e g indicada nas equações (13.32), (13.33) e (13.34) é exatamente o que era esperado. Um pêndulo comprido possui um período maior do que um pêndulo curto. Quando g aumenta, a força restauradora torna-se maior, fazendo aumentar a freqüência e diminuir o período. Enfatizamos, mais uma vez, que o movimento do pêndulo simples é *aproximadamente* harmônico simples. Quando a amplitude não é pequena, o desvio do comportamento harmônico simples pode ser significativo. Porém, como estabelecer o limite para 'pequeno'? O período pode ser desenvolvido em uma série infinita; quando o deslocamento angular máximo é Θ, o período T é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\operatorname{sen}^2\frac{\Theta}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\operatorname{sen}^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\right) \tag{13.35}$$

Podemos calcular o período com a precisão desejada se tomarmos na série o número de termos necessários. Convidamos você a mostrar que quando $\theta = 15°$ (para cada lado da direção vertical central), o período real é cerca de 0,5% maior do que o período aproximado indicado pela Equação (13.34).

A utilidade de um pêndulo para medir o tempo depende do fato de o período ser *aproximadamente* independente da amplitude, desde que a amplitude seja pequena. Portanto, quando um relógio de pêndulo envelhece e a amplitude das oscilações diminui um pouco, o relógio continua a medir o tempo de modo aproximadamente correto.

Exemplo 13.8

UM PÊNDULO SIMPLES Calcule a freqüência e o período de um pêndulo simples de 1000 m de comprimento em um local onde $g = 9{,}800\ \text{m/s}^2$.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: como se trata de um pêndulo simples, podemos usar as idéias discutidas nesta seção.

PREPARAR: usaremos a Equação (13.34) para calcular o período T do pêndulo a partir de seu comprimento, e a Equação (13.1) para achar a freqüência f a partir de T.

EXECUTAR: pelas equações (13.34) e (13.1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1000\ \text{m}}{9{,}800\ \text{m/s}^2}} = 2{,}007\ \text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2007\text{s}} = 0{,}4983\ \text{Hz}$$

AVALIAR: o período é quase exatamente igual a 2 s. De fato, quando o sistema métrico foi estabelecido, o segundo foi definido como a metade do período de um pêndulo de 1 m. Essa não foi uma boa escolha para um padrão de tempo, contudo, porque o valor de g varia de um local para outro. Na Seção 1.3, discutimos padrões mais modernos para o tempo.

Teste sua compreensão da Seção 13.5 Quando um corpo que oscila preso a uma mola horizontal passa por sua posição de equilíbrio, sua aceleração é igual a zero (ver Figura 13.2b). Quando o peso de um pêndulo simples oscilando passa pela posição de equilíbrio, sua aceleração é igual a zero? ∎

13.6 O pêndulo físico

Um **pêndulo físico** é qualquer pêndulo *real*, que usa um corpo com volume finito, em contraste com o modelo idealizado do pêndulo *simples*, que usa um corpo cuja massa está concentrada em um único ponto. Para oscilações pequenas, analisar o movimento de um pêndulo físico é quase tão fácil quanto analisar o movimento de um pêndulo simples. A Figura 13.23 mostra um corpo de forma irregular suspenso por um pivô e girando sem atrito ao

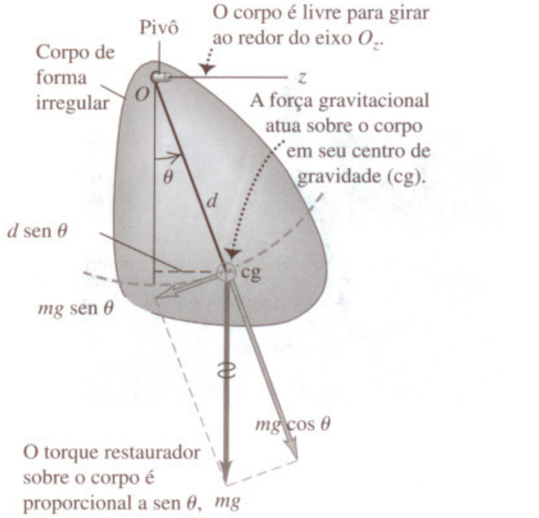


Figura 13.23 Dinâmica de um pêndulo físico.

redor de um eixo que passa pelo ponto O. Na posição de equilíbrio, o centro de gravidade está diretamente abaixo do pivô; na posição indicada na figura, o corpo está deslocado de um ângulo θ, que nós usaremos como a coordenada do sistema. A distância entre o ponto O e o centro de gravidade é d; o momento de inércia do corpo em torno do eixo de rotação passando pelo ponto O é I e a massa total é igual a m. Quando o corpo é deslocado conforme indicado, o peso mg produz um torque restaurador

$$\tau_z = -(mg)(d\text{sen}\theta) \qquad (13.36)$$

O sinal negativo mostra que o torque restaurador possui sentido anti-horário quando o deslocamento possui sentido horário, e vice-versa.

Quando o corpo é liberado, ele oscila em torno da posição de equilíbrio. O movimento não é harmônico simples, porque o torque restaurador não é proporcional a θ, mas sim a sen θ. Contudo, quando o ângulo θ é pequeno, podemos novamente aproximar sen θ por θ em radianos, como fizemos ao analisar o pêndulo simples. Dessa forma, o movimento é *aproximadamente* harmônico simples. Com essa aproximação,

$$\tau_z = -(mgd)\theta$$

A equação do movimento é $\sum\tau_z = I\alpha_z$, logo

$$-(mgd)\theta = I\alpha_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \qquad (13.37)$$

Comparando esse resultado com a Equação (13.4), vemos que o termo (k/m) do sistema massa-mola é análogo ao termo (mgd/I). Portanto, a freqüência angular é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{(pêndulo físico, amplitude pequena)} \qquad (13.38)$$

A freqüência f é $\frac{1}{2}\pi$ desse valor, e o período T é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \text{(pêndulo físico, amplitude pequena)} \qquad (13.39)$$

A Equação (13.39) é a base para a determinação do momento de inércia de um corpo com forma complicada. Inicialmente, localizamos o centro de gravidade do corpo efetuando testes de equilíbrio. A seguir, o corpo é suspenso de modo que possa girar livremente em torno de um eixo, e medimos o período T das oscilações com amplitude pequena. Usando-se a Equação (13.39), o momento de inércia I em torno desse eixo pode ser calculado a partir de T, da massa m e da distância d entre o eixo e o centro de gravidade (ver o Exercício 13.49). Pesquisadores de biomecânica usam esse método para calcular o momento de inércia das pernas de animais. Essa informação é importante para analisar como um animal caminha, conforme veremos no segundo dos dois exemplos apresentados a seguir.

Exemplo 13.9

PÊNDULO FÍSICO CONTRA PÊNDULO SIMPLES

Suponha que o corpo da Figura 13.23 seja uma barra uniforme de comprimento L suspensa em uma de suas extremidades. Calcule o período de seu movimento.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: a variável que queremos encontrar é o período da oscilação de uma barra que age como um pêndulo físico. Para resolver esse problema, precisamos saber o momento de inércia da barra.

PREPARAR: verificamos a Tabela 9.2 (Seção 9.4) para achar o momento de inércia da barra e depois substituímos esse valor na Equação (13.39) para calcular o período da oscilação.

EXECUTAR: de acordo com a Tabela 9.2, o momento de inércia de uma barra uniforme em relação a um eixo passando em sua extremidade é $I = \frac{1}{3}ML^2$. A distância entre o pivô e o centro de gravidade é $d = L/2$. Pela Equação (13.39),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{MgL/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

AVALIAR: caso a barra seja uma régua de um metro ($L = 1{,}0$ m) e $g = 9{,}80$ m/s^2, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(1{,}0\text{ m})}{3(9{,}80\text{ m/s}^2)}} = 1{,}64\text{ s}$$

Esse período é $\sqrt{2/3} = 0{,}816$ menor do que o período do pêndulo simples de mesmo comprimento calculado no Exemplo 13.8 (Seção 13.6). A distância entre o cg da barra e o pivô é a metade da distância entre o cg do pêndulo simples e o pivô, o que significa que o torque possui a metade do valor. Esse fator sozinho seria suficiente para dar à barra um período $\sqrt{2}$ vezes maior do que o do pêndulo simples. Mas o momento de inércia da barra em torno de uma de suas extremidades, $I = \frac{1}{3}ML^2$, é um terço do momento da inércia do pêndulo simples, fator que, sozinho, faria com que o período da barra passasse a ser $\sqrt{1/3}$ do pêndulo simples. O momento de inércia é o fator mais importante neste caso, e é por essa razão que a barra possui um período mais curto do que o pêndulo simples.

Exemplo 13.10

TYRANNOSAURUS REX E O PÊNDULO FÍSICO

Todos os animais que caminham, inclusive os homens, possuem um ritmo natural da caminhada, ou seja, um número de passos por minuto mais confortável do que um ritmo mais lento ou veloz. Suponha que esse ritmo natural seja igual ao período da perna, encarada como um pêndulo em forma de barra com um pivô na junta do quadril. a) Como o ritmo de uma caminhada natural depende do comprimento L da perna, medido desde o quadril até o pé? b) Evidências de fósseis mostram que o *Tyrannosaurus rex*, um dinossauro com duas pernas que viveu há 65 milhões de anos no final do período cretáceo, tinha pernas de comprimento $L = 3{,}1$ m e uma passada (distância entre uma pegada e a pegada seguinte do mesmo pé) $S = 4{,}0$ m (Figura 13.24). Estime a velocidade da caminhada do *Tyrannosaurus rex*.

SOLUÇÃO

IDENTIFICAR: as variáveis procuradas são (a) a relação entre o ritmo de caminhada e o comprimento da perna e (b) a velocidade de caminhada do *T. rex*.

PREPARAR: vamos considerar a perna um pêndulo físico, com um período de oscilação dado como no Exemplo 13.9. Quanto mais curto o período, mais rápido é o ritmo de caminhada. Podemos encontrar a velocidade de caminhada a partir do período e do comprimento da passada.

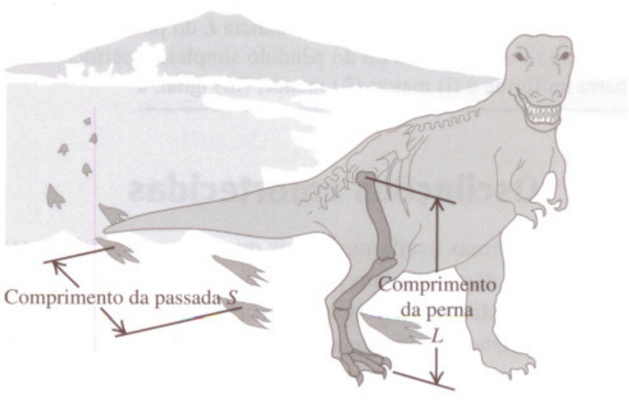


Figura 13.24 A velocidade da caminhada do *Tyrannosaurus rex* pode ser estimada a partir do comprimento de sua perna L e do comprimento de sua passada S.

EXECUTAR: a) Conforme o Exemplo 13.9, o período de oscilação da perna é $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$, proporcional a $\sqrt{L}$. Cada período (uma oscilação completa da perna) corresponde a *dois* passos, então o ritmo da caminhada em passos por unidade de tempo é precisamente igual ao dobro da freqüência $f = 1/T$. Portanto, o ritmo da caminhada é proporcional a $1/\sqrt{L}$. Os animais de pernas curtas (valores pequenos de L), tais como ratos e cachorrinhos *chihuahuas*, têm um ritmo veloz de caminhada; o homem, a girafa e outros animais com pernas longas (valores grandes de L) caminham em ritmo mais lento.

b) De acordo com nosso modelo para o ritmo natural da caminhada, o tempo de uma passada na caminhada do *Tyrannosaurus rex* é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(3{,}1\ \text{m})}{3(9{,}8\ \text{m/s}^2)}} = 2{,}9\ \text{s}$$

A distância percorrida nesse intervalo de tempo é a passada S, de modo que a velocidade da caminhada é

$$v = \frac{S}{T} = \frac{4{,}0\ \text{m}}{2{,}9\ \text{s}} = 1{,}4\ \text{m/s} = 5{,}0\ \text{km/h}$$

Esse valor é aproximadamente igual ao da velocidade da caminhada típica de um homem!

AVALIAR: nossa estimativa deve estar ligeiramente errada porque uma barra não é um modelo muito bom para uma perna. As pernas de muitos animais, incluindo o homem e o *Tyrannosaurus rex*, são cônicas; a quantidade de massa entre o joelho e o quadril é muito maior do que entre o joelho e o pé. Logo, o centro de gravidade está a uma distância menor do que $L/2$ a partir do quadril; uma estimativa razoável pode ser $L/4$. O momento de inércia é *consideravelmente* menor do que $ML^2/3$, provavelmente em torno de $ML^2/15$. Experimente essas estimativas seguindo o Exemplo 13.9; você obterá um período mais curto para as oscilações e um fator ainda maior para a velocidade da caminhada do *Tyrannosaurus rex*.

Teste sua compreensão da Seção 13.6 O centro de gravidade de um pêndulo simples de massa m e comprimento L está localizado na posição do peso do pêndulo, a uma distância L do ponto de suspensão. O centro de gravidade de uma barra uniforme com a mesma massa m e comprimento $2L$ em torno de uma extremidade está também a uma distância L do ponto de suspensão. Em relação ao período do pêndulo simples, o período dessa barra uniforme é (i) maior; (ii) menor; (iii) igual. ∎

13.7 Oscilações amortecidas

Os sistemas oscilantes ideais que foram discutidos até o momento não possuíam atrito. Nesses sistemas as forças são conservativas, a energia mecânica total é constante e, quando o sistema começa a oscilar, ele continua oscilando eternamente sem nenhuma diminuição da amplitude.

Os sistemas reais sempre possuem alguma força não conservativa, contudo, e a amplitude das oscilações vai diminuindo com o tempo, a menos que seja fornecida alguma energia para suprir a dissipação da energia mecânica. Um relógio de pêndulo mecânico continua a oscilar porque a energia potencial acumulada em uma mola ou em sistema de pesos suspensos é usada para suprir a dissipação da energia mecânica no pivô e nas engrenagens. Porém, a mola acaba se desgastando, ou os pesos acabam atingindo o final de seus percursos. Então não existe mais energia disponível, e a amplitude das oscilações diminui até o pêndulo parar.

Figura 13.25 Um sino balançando por si só acaba parando de oscilar devido a forças amortecedoras (resistência do ar e atrito no ponto de suspensão).

A diminuição da amplitude provocada por uma força dissipativa denomina-se **amortecimento** e o movimento correspondente denomina-se **oscilação amortecida**. O caso mais simples a ser examinado em detalhe é um oscilador harmônico simples com uma força de atrito amortecedora diretamente proporcional à *velocidade* do corpo que oscila. Esse comportamento ocorre no escoamento de um fluido viscoso, tal como em um amortecedor ou no caso do atrito entre superfícies lubrificadas com óleo. Nesse caso, existe uma força de atrito adicional que atua sobre o corpo, dada por $F_x = -bv_x$, onde $v_x = dx/dt$ é a velocidade e b é uma constante que descreve a intensidade da força de amortecimento. O sinal negativo indica que a força possui sempre um sentido contrário ao da velocidade. Portanto, a força *resultante* sobre o corpo é dada por

$$\sum F_x = -kx - bv_x \qquad (13.40)$$

e a segunda lei de Newton para o sistema é

$$-kx - bv_x = ma_x \quad \text{ou} \quad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (13.41)$$

A Equação (13.41) é uma equação diferencial para x; a única diferença entre ela e a Equação (13.4) que fornece a aceleração no MHS é que ela possui um termo adicional $-bdx/dt$. Essa equação pode ser resolvida facilmente pela teoria das equações diferenciais, porém não daremos os detalhes dessa solução aqui. Quando a força de amortecimento é relativamente pequena, o movimento é descrito por

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi)$$
(oscilador com amortecimento pequeno) (13.42)

A freqüência angular ω' é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$
(oscilador com amortecimento pequeno) (13.43)

Podemos verificar que a Equação (13.42) é uma solução da Equação (13.41) calculando a primeira e a segunda derivadas de x, substituindo o resultado na Equação (13.41) e conferindo se o membro esquerdo é igual ao membro direito. Esse procedimento é muito simples, porém trabalhoso.

O movimento descrito pela Equação (13.42) difere do caso sem amortecimento de dois modos. Primeiro, a amplitude $Ae^{-(b/2m)t}$ não é constante e diminui com o tempo por causa do fator decrescente $e^{-(b/2m)t}$. A Figura 13.26 é um gráfico da Equação (13.42) para um ângulo de fase $\phi = 0$; ela mostra que, quanto maior for o valor de b, mais rapidamente diminuirá a amplitude.

Segundo, a freqüência angular ω', dada pela Equação (13.43), não é mais igual a $\omega = \sqrt{k/m}$, e sim ligeiramente menor. Ela tende a zero quando b é tão grande que

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad b = 2\sqrt{km} \qquad (13.44)$$

Quando a Equação (13.44) é satisfeita, ocorre o chamado **amortecimento crítico**. O sistema não oscila mais e, ao ser deslocado e libertado, retorna para sua posição de equilíbrio sem oscilar.

A condição b maior do que $2\sqrt{km}$ corresponde ao **superamortecimento**. Novamente o sistema não oscila, porém retorna para sua posição de equilíbrio mais lentamente do que no caso do amortecimento crítico. Para o caso do superamortecimento, as soluções da Equação (13.41) possuem a seguinte forma:

$$x = C_1e^{-a_1t} + C_2e^{-a_2t}$$

onde C_1 e C_2 são constantes que dependem das condições iniciais, e a_1 e a_2 são constantes determinadas por m, k e b.

Para b menor do que o valor crítico, quando a Equação (13.42) é satisfeita, a condição denomina-se **subamortecimento**. O sistema oscila com uma amplitude que diminui continuamente.

Em um diapasão vibrando ou na corda de um violão, geralmente deseja-se o menor amortecimento possível. Em contraste, o amortecimento tem um efeito benéfico no sistema de suspensão de um automóvel. As forças de amortecimento de um carro dependem da velocidade e impedem que ele oscile eternamente ao passar por alguma saliência em seu caminho (Figura 13.27). Para o maior conforto do passageiro, o sistema deve ser criticamente amortecido ou ligeiramente subamortecido. Amortecimento demais é contraproducente; se a suspensão estiver superamortecida e o carro passar por outra saliência logo após a primeira, as molas da suspensão ainda estarão comprimidas devido ao primeiro solavanco e não conseguirão absorver completamente o impacto.

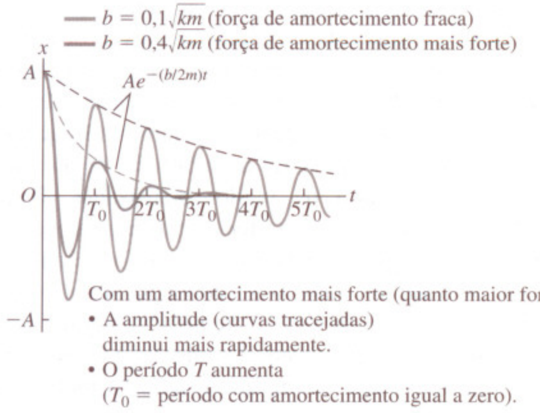


Figura 13.26 Gráfico do deslocamento em função do tempo de um oscilador com leve amortecimento (ver Figura 13.42) e com um ângulo de fase $\phi = 0$. As curvas mostram dois valores da constante de amortecimento b.

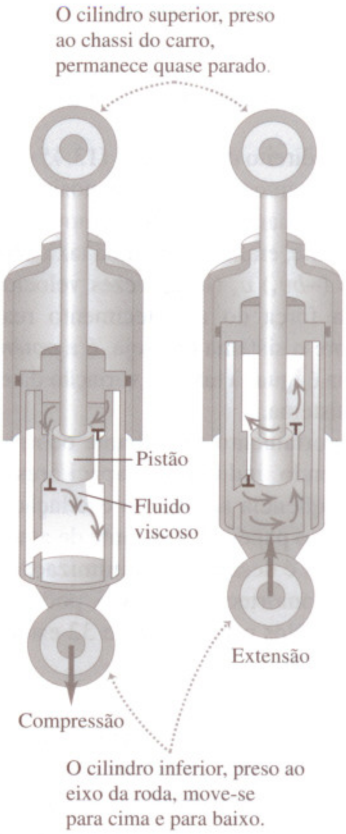


Figura 13.27 Amortecedor de um carro. O fluido viscoso produz uma força de amortecimento que depende da velocidade relativa entre as duas extremidades da unidade.

Energia em oscilações amortecidas

Nas oscilações amortecidas, a força do amortecimento não é conservativa; a energia mecânica do sistema não é constante e diminui continuamente, tendendo a zero depois de um tempo longo. A fim de deduzir uma expressão para a taxa de variação da energia, inicialmente escrevemos uma expressão para a energia mecânica total E em qualquer instante:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

A derivada da equação anterior em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{dE}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

Porém, $dv_x/dt = a_x$ e logo,
$dx/dt = v_x$, então

$$\frac{dE}{dt} = v_x(ma_x + kx)$$

Pela Equação (13.41), $ma_x + kx = -bd_x/dt, = -bv_x$, logo

$$\frac{dE}{dt} = v_x(-bv_x) = -bv_x^2$$

(oscilações amortecidas) (13.45)

O membro direito da Equação (13.45) é sempre negativo, independentemente de v_x ser positivo ou negativo. Isso mostra que, quando o corpo se move, a energia diminui continuamente, embora com uma taxa não uniforme. O termo $-bv_x^2 = (-bv_x)\, v_x$ (força vezes velocidade) é a taxa com a qual a força do amortecimento realiza trabalho (negativo) sobre o sistema (ou seja, é a *potência* do amortecimento). Ela é igual à taxa de variação da energia mecânica total do sistema.

Um comportamento semelhante ocorre em circuitos elétricos contendo indutores, capacitores e resistores. Existe uma freqüência natural da oscilação, e a resistência desempenha o papel da constante de amortecimento b. Em tais circuitos é desejável a minimização do amortecimento, mas o amortecimento não pode ser eliminado completamente. Nos capítulos 31 e 32 estudaremos esses circuitos em detalhe.

Teste sua compreensão da Seção 13.7 Um avião está voando em linha reta a uma altitude constante. Se uma rajada de vento soprar e erguer o nariz do avião, o nariz oscilará para cima e para baixo até que o avião volte à sua posição original. Essas oscilações são (i) não amortecidas, (ii) subamortecidas, (iii) criticamente amortecidas ou (iv) superamortecidas? ∎

13.8 Oscilações forçadas e ressonância

Quando um oscilador amortecido é deixado livre, suas oscilações tendem a parar. Porém, podemos manter constante a amplitude das oscilações aplicando uma força que varia periodicamente, com dado período e uma freqüência fixa. Como exemplo, considere seu primo Tobias oscilando no balanço de um *playground*. Você pode manter constante a amplitude das oscilações se fornecer a ele um pequeno empurrão ao final de cada ciclo. Essa força adicional é chamada de **força propulsora**.

Oscilações amortecidas com uma força propulsora periódica

Quando aplicamos uma força propulsora variando periodicamente com uma freqüência angular ω_d a um oscilador harmônico amortecido, o movimento resultante é uma **oscilação forçada** ou uma *oscilação com força propulsora*. Trata-se de um movimento diferente do ocorrido quando simplesmente deslocamos o sistema da sua posição de equilíbrio e o deixamos livre; nesse caso, o sistema oscila com uma **freqüência angular natural** ω' determinada por m, k e b, como na Equação (13.43). Contudo, no caso de uma oscilação forçada, a freqüência angular da oscilação da massa é igual à freqüência angular da força propulsora ω_d. Essa freqüência *não* é igual à freqüência angular ω' com a qual o sistema oscilaria caso não estivesse submetido à ação da força. Quando você segura as cordas do balanço de Tobias, pode forçá-lo a oscilar com qualquer freqüência que desejar.

Suponha que você force o oscilador a vibrar com uma freqüência angular ω_d *igual* à freqüência angular ω' com a qual ele oscilaria sem a ação de nenhuma força. O que ocorreria? O oscilador teria uma tendência natural a oscilar com uma freqüência angular $\omega = \omega'$, então é de se esperar que a amplitude da oscilação seja maior do que a amplitude existente quando as freqüências são muito diferentes. Uma análise detalhada e dados experimentais mostram que isso é exatamente o que ocorre. O caso mais simples a ser analisado é o de uma força que varia *senoidalmente*, com a forma $F(t) = F_{máx} \cos \omega_d t$. Quando variamos a freqüência angular ω_d da força propulsora, a amplitude da oscilação forçada resultante varia de modo interessante (Figura 13.28). Quando existe um amortecimento muito pequeno (b pequeno), a amplitude tende a crescer fortemente até atingir um pico agudo, quando a freqüência angular ω_d da força propulsora torna-se igual à freqüência angular natural ω'. Quando o amortecimento é aumentado (b maior), o pico se torna mais largo, a amplitude se torna menor e se desloca para freqüências menores.

Podemos deduzir uma expressão que mostra como a amplitude A da oscilação forçada depende da freqüência angular de uma força propulsora senoidal, que possui um valor máximo $F_{máx}$. Isso exige a solução de equações diferenciais que você ainda não está preparado para resolver, porém o resultado obtido é:

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}}$$

(amplitude de um oscilador forçado) (13.46)

Quando $k - m\omega_d^2 = 0$ (o primeiro termo sob o sinal da raiz quadrada for igual a zero), o valor de A torna-se máximo para $\omega_d = \sqrt{k/m}$. A altura da curva nesse ponto é proporcional a $1/b$; quanto menor for o amortecimento, mais elevado se torna o pico. No caso extremo de baixas freqüências, quando $\omega_d = 0$, obtemos $A = F_{máx}/k$. Esse resultado era de se esperar, porque ele corresponde a uma força *constante* $F_{máx}$ e a um deslocamento constante $A = F_{máx}/k$.

A ressonância e suas conseqüências

A **ressonância** é o fenômeno que ocorre quando existe um pico de amplitude provocado por uma força cuja freqüência está próxima da freqüência da oscilação natural do sistema. A física está repleta de exemplos de ressonância; um desses exemplos é criar oscilações com grande amplitude empurrando uma criança em um balanço com uma freqüência igual à freqüência da oscilação natural do balanço. As fortes vibrações que ocorrem em um carro quando o motor gira em determinadas rotações, ou quando a velocidade das rodas atinge determinados valores, são exemplos familiares de ressonâncias. Um alto-falante barato geralmente produz um ruído desagradável quando uma nota musical coincide com a freqüência da oscilação natural da caixa ou do cone do alto-falante. No Capítulo 16 estudaremos outros exemplos de ressonância que envolvem som. Circuitos elétricos também apresentam ressonância, como veremos no Capítulo 31: os circuitos de sintonia do rádio ou da televisão respondem fortemente a ondas que possuam uma freqüência próxima da freqüência de ressonância do respectivo circuito, e esse fato é usado para selecionar uma emissora e rejeitar as outras.

A ressonância de um sistema mecânico pode ser destrutiva. Uma tropa de soldados, em certa ocasião, destruiu uma ponte porque a atravessou em passo de marcha; a freqüência da marcha era próxima da freqüência da vibração natural da ponte, e o crescimento das amplitudes da oscilação resultante foi suficiente para quebrá-la. Desde que ocorreu esse desastre, os soldados são orientados a não marcharem de modo cadenciado ao atravessar uma ponte. Há alguns anos, as vibrações do motor de um avião atingiram uma freqüência próxima da freqüência de ressonância das asas do avião. As oscilações se somaram e as asas se partiram.

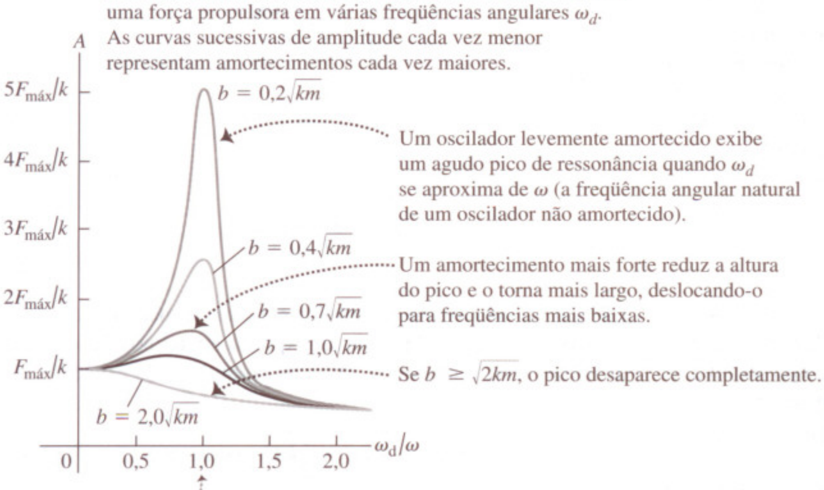


Figura 13.28 Gráfico da amplitude A da oscilação forçada de um oscilador harmônico amortecido em função da freqüência angular ω_d da força propulsora. O eixo horizontal indica a razão entre a freqüência angular ω_d e a freqüência angular $\omega = \sqrt{k/m}$ da oscilação natural não amortecida. Cada curva apresenta um valor diferente da constante de amortecimento b.

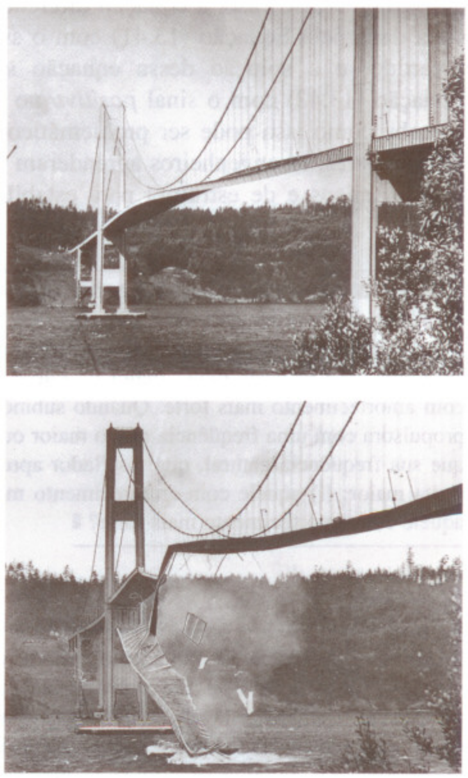


Figura 13.29 A ponte *Tacoma Narrows* foi destruída quatro meses e seis dias depois da sua inauguração. O vão principal, com 853,44 m de comprimento e 11,89 m de largura, contava com vigas protetoras de aço de 2,44 m de altura dos dois lados. A amplitude máxima das vibrações de torção foi de 35°, e a freqüência de ressonância foi de aproximadamente 0,2 Hz.

Quase todo mundo provavelmente já assistiu ao filme do colapso da ponte pênsil *Tacoma Narrows*, ocorrido em 1940 (Figura 13.29). Esse acontecimento geralmente é citado como um exemplo de ressonância provocada pelo vento, porém existem dúvidas sobre a adequação dessa denominação. O vento não precisa variar *periodicamente* com uma freqüência próxima da freqüência natural da ponte. O ar que passava pela ponte era turbulento e produzia vórtices de ar com uma freqüência regular que dependia da velocidade do vento. É possível que essa freqüência tenha atingido um valor próximo da freqüência de ressonância da ponte. Entretanto, o desastre pode ter sido causado por uma vibração mais sutil denominada *oscilação auto-excitada*, na qual as forças aerodinâmicas produzidas pelo vento *estacionário* soprando na ponte tendiam a deslocá-la para além da posição de equilíbrio em momentos em que ela já estava se afastando da posição de equilíbrio. Isso seria como se houvesse uma força de amortecimento dada pelo termo $-bv_x$ na Equação (13.40), porém com um sinal contrário ao dessa equação. Em vez de drenar a energia mecânica para fora do sistema, essa força contrária ao amortecimento bombearia energia para dentro do sistema, fazendo as oscilações crescerem até atingir uma amplitude destrutiva. Nesse caso, a equação diferencial aproximada seria dada pela Equação (13.41) com o sinal do termo b invertido, e a solução dessa equação seria dada pela Equação (13.42) com o sinal *positivo* no expoente. Você percebe como isso pode ser problemático? Para prevenir tais desastres, os engenheiros aprenderam a fazer cálculos aerodinâmicos e de estrutura para estabilizar uma ponte pênsil.

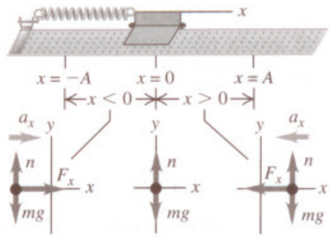
Teste sua compreensão da Seção 13.8 Quando submetido a uma força propulsora com uma freqüência próxima à sua freqüência natural, um oscilador com amortecimento muito fraco apresenta uma resposta muito maior do que o mesmo oscilador com amortecimento mais forte. Quando submetido a uma força propulsora com uma freqüência muito maior ou muito menor do que sua freqüência natural, qual oscilador apresentará uma resposta maior: (i) aquele com amortecimento muito fraco ou (ii) aquele com amortecimento mais forte? ∎

Resumo

Movimento periódico: O movimento periódico é aquele que se repete em um ciclo definido. Ele ocorre quando o corpo possui uma posição de equilíbrio estável e uma força restauradora que atua sobre o corpo quando ele é deslocado da sua posição de equilíbrio. O período T é o tempo necessário para completar um ciclo. A freqüência f é o número de ciclos por unidade de tempo. A freqüência angular ω é 2π vezes a freqüência. (Veja o Exemplo 13.1.)

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \tag{13.1}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{13.2}$$



Movimento harmônico simples: Quando a força resultante for uma força restauradora F_x diretamente proporcional ao deslocamento x, o movimento denomina-se movimento harmônico simples (MHS). Em muitos casos, essa condição é satisfeita se o deslocamento a partir do equilíbrio for pequeno. A freqüência angular, a freqüência e o período em MHS não dependem da amplitude, apenas da massa m e da constante da mola k. O deslocamento, a velocidade e a aceleração em MHS são funções senoidais do tempo; a amplitude A e o ângulo de fase ϕ da oscilação são determinados pela posição inicial e velocidade do corpo. (Veja os exemplos 13.2, 13.3, 13.6 e 13.7.)

$$F = -kx \tag{13.3}$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{13.4}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.10}$$

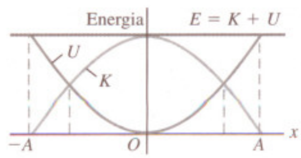
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.11}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13.12}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{13.13}$$

Energia no movimento harmônico simples: A energia se conserva no MHS. A energia total pode ser expressa em termos da constante da mola k e da amplitude A. (Veja os exemplos 13.4 e 13.5.)

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \tag{13.21}$$



Movimento harmônico simples angular: No movimento harmônico angular, a freqüência e a freqüência angular são relacionadas ao momento de inércia I e à constante de torção k.

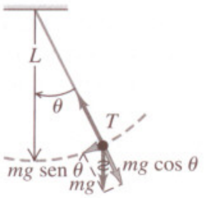
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{13.24}$$

Pêndulo simples: Um pêndulo simples é constituído por uma massa pontual m presa à extremidade de um fio sem massa de comprimento L. Seu movimento é aproximadamente harmônico simples para amplitudes suficientemente pequenas, portanto a freqüência angular, a freqüência e o período dependem apenas de g e L, não da massa ou da amplitude. (Veja o Exemplo 13.8.)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.32}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.33}$$

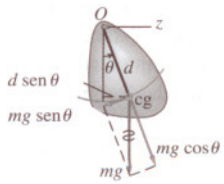
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{13.34}$$



Pêndulo físico: Um pêndulo físico é qualquer corpo suspenso em um eixo de rotação. A freqüência angular, a freqüência e o período, para oscilações de pequena amplitude, são independentes da amplitude; dependem somente da massa m, da distância d do eixo de rotação ao centro de gravidade e do momento de inércia I em torno do eixo de rotação. (Veja os exemplos 13.9 e 13.10.)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{13.38}$$

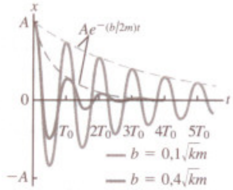
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{13.39}$$



Oscilações amortecidas: Quando uma força amortecedora proporcional à velocidade $F_x = -bv_x$ atua em um oscilador harmônico, o movimento denomina-se oscilação amortecida. Se $b < 2\,\omega = \sqrt{k/m}$ (subamortecimento), o sistema oscila com uma amplitude cada vez menor e uma freqüência angular ω' menor do que seria sem o amortecimento. Se $b = 2\,\omega = \sqrt{k/m}$ (amortecimento crítico) ou se $b > 2\,\omega = \sqrt{k/m}$ (superamortecimento), então o sistema ao ser deslocado retorna ao equilíbrio sem oscilar.

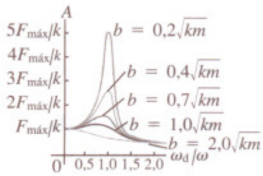
$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos\omega' t \tag{13.42}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{13.43}$$



Oscilações forçadas e ressonância: Quando uma força propulsora que varia senoidalmente atua sobre um oscilador harmônico amortecido, o movimento resultante denomina-se oscilação forçada. A amplitude é dada em função da freqüência angular ω_d da força propulsora, e atinge um pico quando a freqüência da força propulsora possui um valor próximo da freqüência da oscilação natural do sistema. Esse fenômeno denomina-se ressonância.

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \tag{13.46}$$



Principais termos

Resposta à Pergunta Inicial do Capítulo

Nenhuma das respostas. O relógio continuaria marcando o tempo corretamente. Se a massa de sua haste for pequena a ponto de poder ser desprezada, então o pêndulo é um pêndulo simples e seu período é independente da massa [veja a Equação (13.34)]. Se a massa do pêndulo for incluída, o pêndulo é um pêndulo físico. Dobrar sua massa m faz com que seu momento de inércia I também seja dobrado, logo a razão I/m permanece inalterada e o período $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$ [Equação (13.39)] não se altera.

Respostas às Perguntas dos Testes de Compreensão

13.1 Respostas: (a) $x < 0$, (b) $x > 0$, (c) $x < 0$, (d) $x > 0$, (e) $x = 0$, (f) $x > 0$. A Figura 13.2 mostra que o componente resultante no eixo Ox da força F_x e da aceleração a_x são ambos positivos quando $x < 0$ (logo, o corpo é deslocado para a esquerda e a mola é comprimida); quando $x > 0$, F_x e a_x são ambas negativas (assim o corpo é deslocado para a direita, e a mola é esticada). Portanto, x e a_x sempre apresentam sinais *opostos*. Isso é verdade quer o objeto esteja se movendo para a direita ($v_x > 0$), quer para a esquerda ($v_x < 0$), ou mesmo se não estiver se movendo ($v_x = 0$), já que a força exercida pela mola depende apenas do fato de ela estar comprimida ou esticada, e de que comprimento. Isso explica as respostas de (a) até (e). Se a aceleração for nula como em (f), a força resultante também deve ser nula e, assim, a mola não deve estar comprimida nem esticada; logo, $x = 0$.

13.2 Respostas: (a) $A > 0{,}10$ m, $\phi < 0$; (b) $A > 0{,}10$ m, $\phi > 0$. Em ambas as situações, a velocidade inicial v_{0x} no eixo Ox em $t = 0$ não é nula. Portanto, pela Equação (13.19), a amplitude $A = \sqrt{x_0^2 + (v_{0x}^2/\omega^2)}$ é maior do que a coordenada inicial no eixo Ox $x_0 = 0{,}10$ m. Pela Equação (13.18), o ângulo de fase é dado por $\phi = \text{arc tg}\,(-v_{0x}/\omega x_0)$, sendo positivo se a grandeza $-v_{0x}/\omega x_0$ (o argumento da função arco tangente) for positivo, e negativo se $-v_{0x}/\omega x_0$ for negativo. Na parte (a) x_0 e v_0 são ambos positivos, portanto $-v_{0x}/\omega x_0 < 0$ e $\phi < 0$. Na parte (b), x_0 é positivo e v_{0x} é negativo, portanto $-v_{0x}/\omega x_0 > 0$ e $\phi > 0$.

13.3 Respostas: (a) (iii), (b) (v). Para aumentar a energia total $E = \frac{1}{2}kA^2$ de um fator 2, a amplitude A deve ser aumentada de um fator $\sqrt{2}$. Como se trata de um MHS, a variação da amplitude não exerce nenhum efeito sobre a freqüência.

13.4 Resposta: (i). O período de oscilação de um corpo de massa m suspenso em uma mola de força constante k é dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, a mesma expressão que usamos para um corpo preso a uma mola horizontal. Nem m nem k variam quando o aparelho é levado a Marte, portanto o período não se altera. A única diferença é que, na posição de equilíbrio, a mola irá se esticar de um comprimento menor em Marte do que na Terra, devido à gravidade menor.

13.5 Resposta: não. Assim como ocorre com um objeto oscilando em uma mola, na posição de equilíbrio a *velocidade* do peso do pêndulo não varia momentaneamente (isso ocorre quando a velocidade é máxima, portanto sua derivada é zero nesse momento). Entretanto, a *direção* do movimento varia, porque o peso do pêndulo executa uma trajetória circular. Assim, o peso deve ter um componente da aceleração perpendicular ao deslocamento e orientado para o centro do círculo (ver Seção 3.4). Para produzir essa aceleração na posição de equilíbrio quando a mola está na vertical, a força de tensão para cima nessa posição deve ser maior do que o peso do pêndulo. Isso produz uma força resultante para cima sobre o peso do pêndulo e uma aceleração para cima na direção do centro da trajetória circular.

13.6 Resposta: (i). O período de um pêndulo físico é dado pela Equação (13.39), $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$. A distância $d = L$ do pivô ao centro de gravidade é a mesma para a barra e para o pêndulo simples, assim como a massa m. Isso significa que, para qualquer ângulo de deslocamento, o mesmo torque restaurador age tanto sobre a barra quanto sobre o pêndulo simples. Entretanto, a barra possui um momento de inércia maior: $I_{\text{barra}} = \frac{1}{3}m(2L)^2 = \frac{4}{3}mL^2$ e $I_{\text{pêndulo}} = mL^2$ (toda a massa do pêndulo está a uma distância L do pivô). Logo, a barra possui um período maior.

13.7 Resposta: (ii). As oscilações são subamortecidas com uma amplitude decrescente em cada ciclo de oscilação, como mostrado na Figura 13.26. Se as oscilações não fossem amortecidas, elas continuariam indefinidamente com a mesma amplitude. Se elas fossem amortecidas criticamente ou superamortecidas, o nariz não oscilaria para cima e para baixo, e sim retornaria suavemente à posição de equilíbrio original, sem ultrapassá-la.

13.8 Resposta: (i). A Figura 13.28 mostra que a curva da amplitude em função da freqüência angular da força propulsora é ascendente em *todas* as freqüências à medida que a constante de amortecimento b diminui. Logo, para valores fixos de k e m, o oscilador com o menor amortecimento (menor valor de b) apresentará a maior resposta diante de qualquer freqüência da força propulsora.

Questões para discussão

Q13.1 Um objeto está se movendo na extremidade de uma mola com um MHS de amplitude A. Se a amplitude for dobrada, o que acontece com a distância total que o objeto percorre em um período? O que acontece com o período? O que acontece com a velocidade máxima do objeto? Discuta como essas respostas estão relacionadas.

Q13.2 Forneça diversos exemplos da vida cotidiana de movimentos que possam ser aproximadamente considerados harmônicos simples. Em que aspectos eles diferem do MHS?

Q13.3 Um diapasão ou um dispositivo semelhante usado para afinar um instrumento musical executa um movimento harmônico simples? Por que essa questão é essencial para os músicos?

Q13.4 Uma caixa contendo uma pedrinha é presa a uma mola ideal horizontal e está oscilando em uma mesa de ar sem atrito. Quando a caixa atinge a sua distância máxima do ponto de equilíbrio, a pedrinha é subitamente içada na vertical sem que a caixa seja movida. Diga quais das seguintes grandezas aumentarão, diminuirão ou permanecerão inalteradas no movimento subseqüente da caixa: (a) freqüência; (b) período; (c) amplitude; (d) a energia cinética máxima da caixa; (e) a velocidade máxima da caixa. Justifique cada resposta.

Q13.5 Se uma certa mola uniforme fosse cortada em duas partes iguais, qual seria a constante da mola de cada metade? Justifique sua resposta. Usando-se a mesma massa na extremidade, qual seria a diferença entre a freqüência do MHS da metade da mola e a freqüência da mola inteira?

Q13.6 A análise do MHS feita neste capítulo não levou em consideração a massa da mola. Como a massa da mola altera as características do movimento?

Q13.7 Dois corpos idênticos sobre um trilho de ar estão ligados por uma mola ideal. A oscilação desse sistema constitui um MHS? Explique. Como esse período pode ser comparado com o de um único corpo preso a uma mola cuja outra extremidade está presa a um objeto fixo? Explique.

Q13.8 Você é capturado por marcianos, levado para a nave deles e posto para dormir. Você acorda algum tempo depois e se vê trancado em uma sala pequena, sem janelas. Tudo o que os marcianos lhe deixaram é seu relógio digital de pulso, o anel da sua escola e a sua longa corrente de prata. Explique como você pode verificar se ainda está na Terra ou foi levado para Marte.

Q13.9 O sistema indicado na Figura 13.17 é montado em um elevador. O que acontece com o período do movimento (aumenta, diminui ou permanece constante) se o elevador (a) está subindo com aceleração igual a 5,0 m/s^2; (b) está subindo com velocidade constante de 5,0 m/s; e (c) está descendo com aceleração igual a 5,0 m/s^2. Justifique suas respostas.

Q13.10 Se um pêndulo possui um período de 2,5 s na Terra, qual seria o seu período em uma estação espacial em órbita ao redor da Terra? Se uma massa suspensa em uma mola vertical possui um período de 5,0 s na Terra, qual seria o seu período na estação espacial? Justifique todas as suas respostas.

Q13.11 Um pêndulo simples é montado em um elevador. O que acontece com o período do movimento (aumenta, diminui ou permanece constante) se o elevador (a) está subindo com aceleração igual a 5,0 m/s^2; (b) está subindo com velocidade constante de 5,0 m/s; (c) está descendo com aceleração igual a 5,0 m/s^2 e (d) está descendo com aceleração igual a 9,8 m/s^2. Justifique suas respostas.

Q13.12 Explique o que você deve fazer com o comprimento de um pêndulo simples para: a) dobrar sua freqüência; b) dobrar seu período; c) dobrar sua freqüência angular.

Q13.13 Se um relógio de pêndulo for transportado ao topo de uma montanha, ele se atrasará ou adiantará, supondo que mostrasse a hora certa na base da montanha? Justifique sua resposta.

Q13.14 Quando a amplitude de um pêndulo simples aumenta, seu período aumenta ou diminui? Forneça um argumento qualitativo; não se baseie na Equação (13.35). Seu argumento também seria válido para um pêndulo físico?

Q13.15 Por que um cão com pernas curtas (como o da raça *chihuahua*) caminha com passos mais velozes do que um cão com pernas altas (como o cão dinamarquês)?

Q13.16 Em que ponto do movimento de um pêndulo simples a tensão no fio atinge o valor máximo? E o valor mínimo? Em cada caso, explique o raciocínio usado na resposta.

Q13.17 Um padrão de tempo pode ser baseado no período de um certo pêndulo-padrão? Quais seriam as vantagens e as desvantagens desse padrão em relação ao padrão atual de tempo discutido na Seção 1.3?

Q13.18 Em um pêndulo simples, distinga claramente entre ω (a velocidade angular) e ω (a freqüência angular). Qual é constante e qual é variável?

Q13.19 Um corpo é preso a uma mola fixa ideal e oscila sobre um trilho de ar horizontal, sem atrito. Uma moeda está em cima do corpo e oscila com ele. Em que pontos do movimento a força de atrito sobre a moeda é maior? Em que ponto é menor? Justifique suas respostas.

Q13.20 Ao projetar uma estrutura em uma região propensa à ocorrência de terremotos, qual deve ser a relação entre a freqüência da estrutura e a freqüência típica de um terremoto? Por quê? A estrutura deve possuir um amortecimento grande ou pequeno?

Exercícios

Seção 13.1 Causas da oscilação

13.1 A corda de um piano emite um lá médio vibrando com uma freqüência primária igual a 220 Hz. a) Calcule o período e a freqüência angular. b) Calcule a freqüência angular de uma soprano emitindo um lá uma oitava acima, que é igual a duas vezes a freqüência da corda do piano.

13.2 Se um objeto sobre uma superfície horizontal, sem atrito, é preso a uma mola, deslocado e depois libertado, ele irá oscilar. Se ele for deslocado 0,120 m da sua posição de equilíbrio e libertado com velocidade inicial igual a zero, depois de 0,800 s verifica-se que o seu deslocamento é de 0,120 m no lado oposto e que ele ultrapassou uma vez a posição de equilíbrio durante esse intervalo. Ache (a) a amplitude, (b) o período, (c) a freqüência.

13.3 A extremidade de um diapasão executa 440 vibrações completas em 0,500 s. Calcule a freqüência angular e o período do movimento.

13.4 O deslocamento de um objeto oscilando em função do tempo é mostrado na Figura 13.30. Quais são (a) a freqüência; (b) a amplitude; (c) o período; (d) a freqüência angular desse movimento?

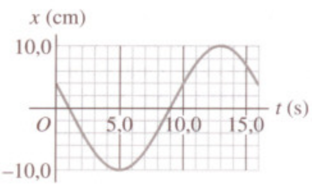


Figura 13.30 Exercício 13.4.

Seção 13.2 Movimento harmônico simples

13.5 A peça de uma máquina está se movendo em MHS com uma freqüência igual a 5,0 Hz e amplitude igual a 1,80 cm. Quanto tempo leva para a peça ir de $x = 0$ até $x = -1{,}80$ cm?

13.6 Em um laboratório de física, você liga um planador de um trilho de ar com 0,200 kg à extremidade de uma mola ideal com massa desprezível e inicia a oscilação. O tempo decorrido entre o instante em que o cavaleiro ultrapassa a posição de equilíbrio e a segunda vez que ele ultrapassa esse ponto é igual a 2,60 s. Calcule o valor da constante da mola.

13.7 Quando um corpo de massa desconhecida é ligado a uma mola ideal cuja constante é igual a 120 N/m, verifica-se que ele oscila com uma freqüência igual a 6,0 Hz. Ache a) o período, b) a freqüência angular, c) a massa do corpo.

13.8 Quando uma massa de 0,750 kg oscila em uma mola ideal, a freqüência é igual a 1,33 Hz. Qual será a freqüência se 0,220 kg forem adicionados à massa original, e (b) subtraídos à massa original? Tente resolver este problema *sem* achar a constante da mola.

13.9 Um oscilador harmônico possui massa de 0,500 kg e uma mola ideal cuja constante é igual a 140 N/m. Ache a) o período, b) a freqüência, c) a freqüência angular das oscilações.

13.10 **Arrancada.** A corda de um violão vibra com uma freqüência igual a 440 Hz. Um ponto em seu centro se move com MHS com amplitude igual a 3,0 mm e um ângulo de fase igual a zero. a) Escreva uma equação para a posição do centro da corda em função do tempo. b) Quais são os valores máximos dos módulos da velocidade e da aceleração do centro da corda? c) A derivada da aceleração em relação ao tempo pode ser chamada de *'arrancada'*. Escreva uma equação para a arrancada do centro da corda em função do tempo e calcule o valor máximo do módulo da arrancada.

13.11 Um bloco de 2,0 kg sem atrito está preso a uma mola ideal cuja constante é igual a 300 N/m. Em $t = 0$ a mola não está comprimida nem esticada, e o bloco se move no sentido negativo com 12,0 m/s. Ache a) a amplitude, b) o ângulo de fase. c) Escreva uma equação para a posição em função do tempo.

13.12 Repita o Exercício 13.11, porém suponha que em $t = 0$ o bloco possua velocidade – 4,0 m/s e deslocamento igual a +0,200 m.

13.13 A ponta da agulha de uma máquina de costura se move com MHS ao longo de um eixo Ox com uma freqüência igual a 2,5 Hz. Em $t = 0$ os componentes da posição e da velocidade são, respectivamente, +1,1 cm e –15 cm/s. a) Ache o componente da aceleração da agulha para $t = 0$. b) Escreva equações para os componentes da posição, da velocidade e da aceleração do ponto considerado em função do tempo.

13.14 Um objeto executa um movimento harmônico simples com período de 1200 s e amplitude igual a 0,600 m. Em $t = 0$ o objeto está em $x = 0$. Qual é a distância entre o objeto e a posição de equilíbrio quando $t = 0,480$ s?

13.15 **Pesando astronautas.** Este processo tem sido realmente usado para 'pesar' astronautas no espaço. Uma cadeira de 42,5 kg é presa a uma mola e deixada oscilar livremente. Quando vazia, a cadeira leva 1,30 s para completar uma vibração. Mas com uma astronauta sentada nela, sem apoiar os pés no chão, a cadeira leva 2,54 s para completar um ciclo. Qual é a massa da astronauta?

13.16 Um objeto de 0,400 kg em MHS possui uma aceleração $a_x = -2,70$ m/s^2 quando $x = 0,300$ m. Qual é a duração de uma oscilação?

13.17 Sobre um trilho de ar sem atrito, horizontal, um corpo oscila na extremidade de uma mola ideal de constante 2,50 N/cm. O gráfico da Figura 13.31 mostra a aceleração do corpo em função do tempo. Encontre (a) a massa do corpo; (b) o deslocamento máximo do corpo a partir do ponto de equilíbrio; (c) a força máxima que a mola exerce sobre o corpo.

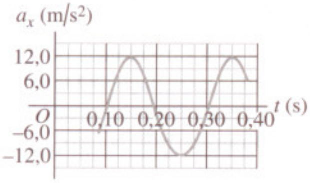


Figura 13.31 Exercício 13.17.

13.18 Uma massa de 0,500 kg oscilando em uma mola tem a velocidade em função do tempo dada por $v_x(t)$ = (3,60 cm/s) sen [(4,71 s^{-1})t – π /2]. Qual é (a) o período; (b) a amplitude; (c) a aceleração máxima da massa; (d) a constante da mola?

13.19 Uma massa de 1,50 kg oscilando em uma mola tem o deslocamento em função do tempo dado pela equação

$$x\,(t) = (7{,}40\text{ cm})\cos\,[(4{,}16\text{ s}^{-1})t - 2{,}42].$$

Encontre (a) o tempo de uma vibração completa; (b) a constante da mola; (c) a velocidade máxima da massa; (d) a força máxima sobre a massa; (e) a posição, velocidade e aceleração da massa em t = 1,00 s; (f) a força sobre a massa nesse instante.

13.20 Um objeto executa um movimento harmônico simples com período de 0,300 s e amplitude igual a 6,0 cm. Em $t = 0$ o objeto está instantaneamente em repouso em $x = 6,0$ cm. Calcule o tempo que o objeto leva para ir de $x = 6,0$ cm até $x = -1,50$ cm.

Seção 13.3 Energia no movimento harmônico simples

13.21 Um diapasão projetado para medir 392 Hz possui a extremidade dos dois ramos do garfo vibrando com uma amplitude de 0,600 mm. a) Qual é a velocidade máxima da extremidade de um ramo? b) Uma mosca (*Musca domestica*) de massa igual a 0,0270 g está pousada na extremidade de um dos ramos. À medida que o ramo vibra, qual é a energia cinética máxima da mosca? Suponha que a massa da mosca possua efeito desprezível sobre a freqüência da oscilação.

13.22 Um oscilador harmônico possui freqüência ω e amplitude A. a) Quais são os valores dos módulos da posição e da velocidade quando a energia potencial elástica for igual à energia cinética? (Suponha que $U = 0$ no equilíbrio.) b) Quantas vezes isso ocorre em cada ciclo? Qual é o intervalo de tempo entre duas ocorrências consecutivas? c) No momento em que o deslocamento é igual a $A/2$, qual é a fração da energia total do sistema referente à energia cinética e a qual fração corresponde à energia potencial?

13.23 Um corpo de 0,500 kg, ligado à extremidade de uma mola ideal de constante $k = 450$ N/m, executa um movimento harmônico simples com amplitude igual a 0,040 m. Calcule: a) a velocidade máxima do cavaleiro; b) a velocidade do cavaleiro quando ele está no ponto x = – 0,015 m; c) o módulo da aceleração máxima do cavaleiro; d) a aceleração do cavaleiro quando ele está no ponto x = – 0,015 m; e) a energia mecânica total do cavaleiro quando ele está em qualquer ponto.

13.24 Uma animadora de torcidas faz seu pompom oscilar em MHS com uma amplitude 18,0 cm e freqüência igual a 0,850 Hz. Ache: a) o módulo da velocidade e da aceleração máxima; b) o módulo da velocidade e da aceleração quando a coordenada do pompom é x = +9,0 cm; c) o tempo necessário para ele se deslocar da posição de equilíbrio até o ponto x = 12,0 cm a partir do equilíbrio. d) Quais das grandezas solicitadas nas partes (a), (b) e (c) podem ser obtidas usando-se o método da energia da Seção 13.3 e quais não podem? Explique.

13.25 Para a situação descrita na parte (a) do Exemplo 13.5, qual deveria ser o valor m da porção de massa de vidraceiro para que a amplitude depois da colisão seja igual à metade da amplitude original? Para esse valor de m, qual é a fração da energia mecânica original convertida em calor?

13.26 Um brinquedo de 0,150 kg executa um movimento harmônico simples na extremidade de uma mola horizontal com uma constante k = 300 N/m. Quando o objeto está a uma distância de 0,012 m da posição de equilíbrio, verifica-se que ele possui uma velocidade igual a 0,300 m/s. Quais são a) a energia mecânica total do objeto quando ele está em qualquer ponto; b) a amplitude do movimento; c) a velocidade máxima atingida pelo objeto durante o movimento?

13.27 Você observa um objeto movendo-se em MHS. Quando o objeto é deslocado até 0,600 m à direita de sua posição de equilíbrio, sua velocidade é igual a 2,20 m/s para a direita, e sua aceleração é igual a 8,40 m/s^2 para a esquerda. A que distância máxima desse ponto irá o objeto se mover antes de parar momentaneamente e depois recomeçar a se mover para a esquerda?

13.28 Em uma mesa horizontal, sem atrito, uma caixa com o lado superior aberto de massa igual a 5,20 kg é suspensa em uma mola ideal horizontal de constante igual a 375 N/m. Dentro da caixa há uma pedra de 3,44 kg. O sistema está oscilando com uma amplitude de 7,50 cm. Quando a caixa alcança sua velocidade máxima, a pedra é subitamente içada na vertical da caixa sem tocar nela. Encontre (a) o período e (b) a amplitude do movimento resultante da caixa. (c) Sem fazer nenhum cálculo, diga se o novo período é maior ou menor do que o inicial. Como você sabe disso?

13.29 Dentro de um veículo de testes da Nasa, uma bola de 3,50 kg é puxada por uma mola horizontal ideal fixa a uma mesa livre de atrito. A constante da mola é 225 N/m. O veículo tem uma aceleração constante igual a 5,0 m/s^2, e a bola não está oscilando. De repente, quando a velocidade do veículo chegou a 45,0 m/s, seus motores são desligados, o que elimina a sua aceleração, mas não a sua velocidade. Calcule (a) a amplitude e (b) a freqüência das oscilações resultantes da bola. (c) Qual será a velocidade máxima da bola em relação ao veículo?

Seção 13.4 Aplicações do movimento harmônico simples

13.30 Um orgulhoso pescador de águas marinhas profundas pendura um peixe de 65,0 kg na extremidade de uma mola ideal de massa desprezível. O peixe estica a mola de 0,120 m. a) Qual é a constante da mola? Se o peixe for puxado para baixo e libertado, b) qual é o período da oscilação do peixe? (c) Que velocidade máxima ele alcançará?

13.31 Um corpo de 175 g sobre um trilho de ar horizontal, sem atrito, é preso a uma mola fixa ideal de constante 155 N/m. No instante em que você efetua medições sobre o corpo, ele está se movendo a 0,815 m/s e está a 3,0 cm de seu ponto de equilíbrio. Use a *conservação da energia* para calcular (a) a amplitude do movimento e (b) a velocidade máxima do corpo. (c) Qual é a freqüência angular das oscilações?

13.32 Um gato com massa igual a 4,0 kg está preso por arreios a uma mola ideal de massa desprezível e oscila verticalmente em MHS. A amplitude do movimento é 0,050 m. No ponto mais alto do movimento, a mola está na posição natural, ou seja, não está esticada. Calcule a energia potencial elástica da mola (considerando-a igual a zero quando ela não está esticada), a energia cinética do gato, a energia potencial gravitacional do sistema em relação ao ponto mais baixo do movimento e a soma dessas três energias quando o gato está a) no ponto mais alto do movimento; b) no ponto mais baixo; c) no ponto de equilíbrio.

13.33 Uma bola de 1,50 kg e outra de 2,0 kg são coladas uma na outra, a mais leve embaixo da mais pesada. A bola de cima é presa a uma mola vertical ideal de constante 165 N/m, e o sistema está vibrando verticalmente com uma amplitude de 15,0 cm. A cola usada para juntar as bolas é velha e fraca, e cede de repente, quando as bolas estão na posição mais baixa de seu movimento. (a) Por que é mais provável que a cola ceda no ponto *mais* baixo e não em qualquer outro ponto do movimento? (b) Calcule a amplitude e a freqüência das vibrações depois que a bola de baixo houver se soltado.

13.34 Um disco de metal sólido, uniforme, de massa igual a 6,50 kg e diâmetro igual a 24,0 cm está suspenso em um plano horizontal, sustentado em seu centro por um fio de metal na vertical. Você descobre que é preciso uma força horizontal de 4,23 N tangente à borda do disco para girá-lo de 3,34°, torcendo, assim, o fio de metal. A seguir você remove essa força e liberta o disco a partir do repouso. (a) Qual é a constante de torção do fio de metal? (b) Qual é a freqüência e o período das oscilações de torção do disco? (c) Escreva a equação do movimento para θ (t) do disco.

13.35 Um relógio dá quatro tiques a cada segundo; cada tique corresponde à metade do período. A roda catarina do relógio consiste em uma fina camada circular com raio de 0,55 cm conectada ao conjunto da roda por meio de raios com massas desprezíveis. A massa total da roda é igual a 0,90 g. a) Qual é o momento de inércia da roda em torno do eixo central? b) Qual é a constante de torção da mola capilar?

13.36 Um disco metálico fino de massa igual a $2{,}0 \times 10^{-3}$ kg e raio igual a 2,20 cm está suspenso em seu centro por uma longa fibra (Figura 13.32). O disco, depois de torcido e libertado, oscila com um período igual a 1,0 s. Calcule a constante de torção da fibra.

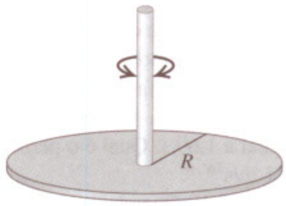


Figura 13.32 Exercício 13.36.

13.37 Você deseja determinar o momento de inércia de certa parte complicada de uma máquina em relação a um eixo passando em seu centro de massa. Você suspende o objeto por um fio ao longo desse eixo. A constante de torção do fio é igual a 0,450 N · m/rad. Você torce ligeiramente o objeto ao redor desse eixo e o liberta, cronometrando 125 oscilações em 265 s. Qual é o momento de inércia?

13.38 A roda catarina de um relógio vibra com uma amplitude angular θ, uma freqüência angular ω e um ângulo de fase $\phi = 0$. a) Determine uma expressão para a velocidade angular $d\theta/dt$ e para a aceleração angular $d^2\theta/dt^2$ em função do tempo. b) Determine a velocidade angular e a aceleração angular quando seu deslocamento angular for igual a θ; e quando seu deslocamento angular for igual a $\theta/2$ e θ estiver diminuindo. (*Sugestão:* Faça um gráfico de θ em função de t.)

***13.39** Para a interação de van der Waals com uma função de energia potencial dada pela Equação (13.25), mostre que, quando o módulo do deslocamento x a partir do equilíbrio ($r = R_0$) for pequeno, a energia potencial pode ser aproximadamente escrita como $U \approx \frac{1}{2}kx^2 - U_0$. [*Sugestão:* Na Equação (13.25), faça $r = R_0 + x$ e $u = x/R_0$. A seguir, aproxime $(1 + u)^n$ pelos *três* primeiros termos do desenvolvimento do teorema binomial na Equação (13.28).] Como se compara o valor de k dessa equação com a constante da força da Equação (13.29) para a força?

***13.40** Quando deslocados da posição de equilíbrio, os dois átomos da molécula de H_2 são submetidos a uma força restauradora $F_x = -kx$ com $k = 580$ N/m. Calcule a freqüência da oscilação da molécula de H_2. [*Sugestão:* A massa do átomo de hidrogênio é igual a 1,008 unidade de massa atômica, ou 1 u (ver Apêndice E). Como no Exemplo 13.7 da Seção 13.4, use $m/2$ em vez de m na expressão de f.]

Seção 13.5 O pêndulo simples

13.41 Você puxa lateralmente um pêndulo simples de 0,240 m de comprimento até um ângulo de 3,50° e solta-o a seguir. a) Quanto tempo leva o peso do pêndulo para atingir a velocidade mais elevada? b) Quanto tempo levaria se o pêndulo simples fosse solto em um ângulo de 1,75° em vez de 3,50°?

13.42 Um alpinista de 85,0 kg planeja saltar, a partir do repouso, de uma saliência de um rochedo usando uma corda leve de 6,50 m de comprimento. Ele segura uma das extremidades da corda, e a outra extremidade é amarrada em uma parede de rocha mais acima. Como a saliência onde ele está não fica muito distante da parede de rocha, a corda forma um ângulo pequeno com a vertical. No ponto mais baixo de seu oscilar, o alpinista planeja largar a corda e cair de uma altura não muito elevada até o chão. (a) Quanto tempo depois de saltar segurando a corda o alpinista chegará pela primeira vez ao seu ponto mais baixo? (b) Se ele perder a primeira oportunidade de soltar a corda, quanto tempo após o início de sua oscilação o alpinista chegará ao seu ponto mais baixo pela segunda vez?

13.43 Um prédio em São Francisco (EUA) tem enfeites luminosos que consistem em pequenos bulbos de 2,35 kg com quebra-luzes pendendo do teto na extremidade de cordas leves e finas de 1,50 m de comprimento. Se um terremoto de fraca intensidade ocorrer, quantas oscilações por segundo farão esses enfeites?

13.44 **Um pêndulo em Marte.** Um pêndulo simples possui na Terra um período igual a 1,60 s. Qual é o período na superfície de Marte onde $g = 3{,}71$ m/s^2?

13.45 Uma maçã pesa 1,0 N. Quando você a suspende na extremidade de uma mola longa de massa desprezível e constante igual a 1,50 N/m, ela oscila para cima e para baixo com um MHS. Quando você interrompe a oscilação e deixa a maçã oscilar lateralmente em um ângulo pequeno, a freqüência do pêndulo simples é igual à metade da freqüência da oscilação vertical. (Como o ângulo é pequeno, a oscilação lateral não produz variação do comprimento da mola.) Determine o comprimento da mola quando ela não está esticada (sem a maçã).

13.46 Uma pequena esfera de massa m está presa a uma barra de comprimento L com um pivô em sua extremidade superior, formando um pêndulo simples. O pêndulo é puxado lateralmente até um ângulo Θ com a vertical e a seguir é libertado a partir do repouso. a) Desenhe um diagrama mostrando o pêndulo logo após o instante em que ele é libertado. No diagrama, desenhe vetores representando as *forças* que atuam sobre a esfera e a *aceleração* da esfera. A precisão é importante! Nesse ponto, qual é a aceleração linear da esfera? b) Repita a parte (a) para o instante em que o pêndulo forma um ângulo $\Theta/2$ com a vertical. c) Repita a parte (a) para o instante em que o pêndulo está na direção vertical. Nesse ponto, qual é a velocidade linear da esfera?

13.47 Depois de pousar em um planeta desconhecido, uma exploradora do espaço constrói um pêndulo simples de 50,0 cm de comprimento. Ela verifica que o pêndulo simples executa 100 oscilações completas em 136 s. Qual é o valor de g nesse planeta?

13.48 Um pêndulo simples, de 2,0 m de comprimento, oscila em um ângulo máximo de 30,0° com a vertical. Calcule o seu período (a) supondo uma amplitude pequena e (b) usando os três primeiros termos da Equação (13.35). (c) Qual das respostas às partes (a) e (b) é mais precisa? A resposta menos precisa está errada em que porcentagem em relação à resposta mais precisa?

Seção 13.6 O pêndulo físico

13.49 Uma barra de conexão de 1,80 kg de um motor de automóvel é suspensa por um eixo horizontal mediante um pivô em forma de cunha como indicado na Figura 13.33. O centro de gravidade da barra determinado por equilíbrio está a uma distância de 0,200 m do pivô. Quando ela executa oscilações com amplitudes pequenas, a barra faz 100 oscilações completas em 120 s. Calcule o momento de inércia da barra em relação a um eixo passando pelo pivô.

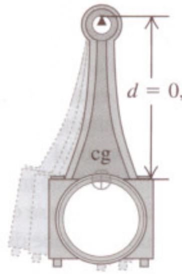


Figura 13.33 Exercício 13.49.

13.50 Desejamos suspender um aro fino usando um prego e fazer o aro executar uma oscilação completa com ângulo pequeno a cada 2,0 s. Qual deve ser o valor do raio do aro?

13.51 Mostre que a expressão do período de um pêndulo físico se reduz ao caso do pêndulo simples quando o pêndulo físico for constituído de uma partícula de massa m presa na extremidade de um fio sem massa de comprimento L.

13.52 Um macaco mecânico de 1,80 kg é suspenso por um pivô localizado a uma distância de 0,250 m de seu centro de massa e começa a oscilar como um pêndulo físico. O período da oscilação com ângulo pequeno é igual a 0,940 s. a) Qual é o momento de inércia do macaco em relação a um eixo passando pelo pivô? b) Quando ele é deslocado 0,400 rad da sua posição de equilíbrio, qual é sua velocidade angular quando ele passa pela posição de equilíbrio?

13.53 Dois pêndulos possuem as mesmas dimensões (comprimento L) e massa total (m). O pêndulo A é uma esfera bem pequena oscilando na extremidade de uma barra uniforme de massa desprezível. No pêndulo B, metade da massa pertence à bola e a outra metade à barra uniforme. Encontre o período de cada pêndulo para oscilações pequenas. Qual dos dois pêndulos leva mais tempo para completar uma oscilação?

13.54 Um enfeite de Natal com forma de esfera oca de massa $M = 0{,}015$ kg e raio $R = 0{,}050$ m é pendurado em um ramo da árvore por um pequeno fio preso à superfície da esfera. Se o ornamento é deslocado de um ângulo pequeno e solto a seguir, ele oscila como um pêndulo físico com atrito desprezível. Calcule seu período. (*Sugestão:* Use o teorema dos eixos paralelos para encontrar o momento de inércia da esfera ao redor do pivô situado no ramo da árvore.)

13.55 Cada um dos dois pêndulos mostrados na Figura 13.34 consiste em uma sólida esfera uniforme de massa M sustentado por uma corda de massa desprezível, porém a esfera do pêndulo A é muito pequena, enquanto a esfera do pêndulo B é bem maior. Calcule o período de cada pêndulo para deslocamentos pequenos. Qual das esferas leva mais tempo para completar uma oscilação?

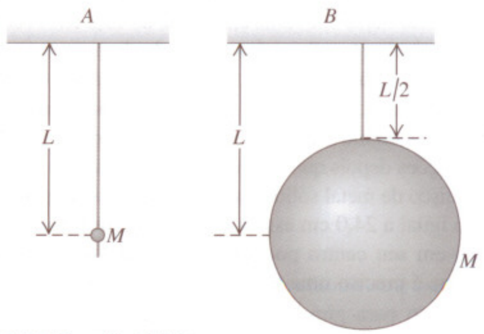


Figura 13.34 Exercício 13.55.

Seção 13.7 Oscilações amortecidas

13.56 Uma massa de 2,20 kg oscila em uma mola de constante igual a 250,0 N/m com um período de 0,615 s. (a) Esse sistema é amortecido ou não? Como você sabe disso? Se for amortecido, encontre a constante de amortecimento b. (b) Esse sistema é não amortecido, subamortecido, criticamente amortecido ou superamortecido? Como você sabe que é assim?

13.57 Uma força de amortecimento $F_x = -bv_x$ atua sobre um rato infeliz de 0,300 kg que se move preso na extremidade de uma mola cuja constante é $k = 2{,}50$ N/m. a) Se a constante b tem um valor igual a 0,900 kg/s, qual é a freqüência da oscilação do rato? b) Para qual valor da constante b o movimento é criticamente amortecido?

13.58 Um ovo de 50,0 g fervido durante muito tempo está preso na extremidade de uma mola cuja constante é $k = 25{,}0$ N/m. Seu deslocamento inicial é igual a 0,300 m. Uma força de amortecimento $F_x = -b_{vx}$ atua sobre o ovo e a amplitude do movimento diminui para 0,100 m em 5,0 s. Calcule o módulo da constante de amortecimento b.

13.59 O movimento de um oscilador com subamortecimento é descrito pela Equação (13.42). Considere o ângulo de fase ϕ igual a zero. a) De acordo com esta equação, qual é o valor de x em $t = 0$? b) Qual é o módulo, a direção e o sentido da velocidade em $t = 0$? O que esse resultado informa sobre a inclinação do gráfico de x em função de t nas vizinhanças de $t = 0$? c) Obtenha uma expressão para a aceleração a_x para $t = 0$. Para que valores ou intervalo de valores da constante de amortecimento b (em termos de k e de m) é a aceleração para $t = 0$ negativa, nula e positiva? Discuta cada caso em termos do gráfico de x em função de t nas vizinhanças de $t = 0$.

Seção 13.8 Oscilações forçadas e ressonância

13.60 Uma força propulsora variando senoidalmente é aplicada a um oscilador harmônico amortecido de massa m e constante da mola k. Se a constante de amortecimento possui valor b_1, a amplitude é A_1 quando a freqüência angular da força propulsora é igual a $\sqrt{k/m}$. Em termos de A_1, qual é a amplitude para a mesma freqüência angular da força propulsora e a mesma amplitude da força propulsora $F_{\text{máx}}$ quando a constante de amortecimento for: a) $3b_1$? b) $b_1/2$?

13.61 Uma força propulsora variando senoidalmente é aplicada a um oscilador harmônico amortecido. a) Quais são as unidades da constante de amortecimento b? b) Mostre que a grandeza $\sqrt{km}$ possui as mesmas dimensões de b. c) Em termos de $F_{\text{máx}}$ e de k, qual é a amplitude para $\omega_d = \sqrt{k/m}$ quando i) $b = 0{,}2\sqrt{km}$ e ii) $b = 0{,}4\sqrt{km}$? Compare seus resultados com a Figura 13.28.

13.62 Um dispositivo experimental e sua estrutura de suporte para instalação a bordo da *International Space Station* (Estação Espacial Internacional) deve funcionar como um sistema massa-mola com subamortecimento com massa de 108 kg e constante da mola igual a $2{,}1 \times 10^6$ N/m. Uma exigência da Nasa é que não ocorra ressonância das oscilações forçadas em nenhuma freqüência menor do que 35 Hz. O dispositivo experimental satisfaz essa exigência?

Problemas

13.63 MHS no motor de um carro. O movimento do pistão no interior do motor de um carro (Figura 13.35) é aproximadamente um MHS. a) Sabendo que o percurso (o dobro da amplitude) é igual a 0,100 m e que o motor gira com 3500 rev/min, calcule a aceleração do pistão no ponto final do percurso. b) Sabendo que a massa do pistão é igual a 0,450 kg, qual é a força resultante exercida sobre ele nesse ponto? c) Calcule a velocidade e a energia cinética do pistão no ponto médio do percurso. d) Qual é a potência média necessária para acelerar o pistão do repouso até a velocidade calculada no item (c)? e) Se o motor girar a 7000 rev/min, quais serão as respostas das partes (b), (c) e (d)?

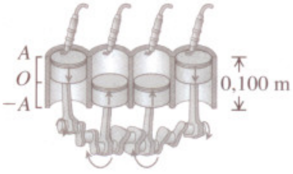


Figura 13.35 Problema 13.63.

13.64 Ao entrarem em um carro, quatro passageiros com massa total igual a 250 kg comprimem em 4,0 cm as molas de um carro com amortecedores gastos. Considere o carro e os passageiros como um único corpo sobre uma única mola ideal. Sabendo que o período da oscilação do carro com os passageiros é igual a 1,08 s, qual é o período da oscilação do carro vazio?

13.65 Um planador executa um MHS com amplitude A_1 sobre um trilho de ar. Você freia o cavaleiro de modo que sua amplitude é reduzida à metade do valor inicial. O que ocorre com os valores: a) do seu período, freqüência e freqüência angular; b) da sua energia mecânica total; c) da sua velocidade máxima; d) da sua velocidade no ponto $x = \pm A_1/4$; e) da sua energia potencial e energia cinética no ponto $x = \pm A_1/4$?

13.66 Uma criança travessa faz o seu prato de jantar de 250 g deslizar em uma mesa horizontal em MHS com amplitude 0,100 m. Em um ponto situado a 0,060 m da posição de equilíbrio a velocidade do prato é igual a 0,300 m/s. a) Qual é o período? b) Qual é o deslocamento quando a velocidade é igual a 0,160 m/s? c) No centro do prato existe um pedaço de cenoura de 10,0 g. Se o pedaço de cenoura está na iminência de escorregar no ponto final da trajetória, qual é o coeficiente de atrito estático entre o pedaço de cenoura e o prato?

13.67 Um prato uniforme, horizontal, de 1,50 kg é preso a uma mola vertical ideal de constante igual a 185 N/m, e uma esfera de metal de 275 g está sobre o prato. A mola está sob o prato, podendo oscilar para cima e para baixo. O prato é, então, empurrado para baixo até 15,0 cm abaixo de seu ponto de equilíbrio (chame esse ponto de A) e liberado a partir do repouso. (a) A que altura acima do ponto A estará o prato quando a esfera de metal deixar o prato? (*Sugestão:* Isso *não* ocorre quando a esfera e o prato atingem suas velocidades máximas.) (b) Quanto tempo passa entre o momento em que o sistema é liberado no ponto A e o momento em que a esfera sai do prato? (c) Com que velocidade a esfera está se movendo ao sair do prato?

13.68 Um bloco de massa M repousa sobre uma superfície sem atrito e está preso a uma mola horizontal cuja constante é k. A outra extremidade da mola está presa a uma parede (Figura 13.36). Um segundo bloco de massa m repousa sobre o primeiro. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é μ_s. Ache a amplitude *máxima* da oscilação para que o bloco superior não deslize sobre o bloco inferior.

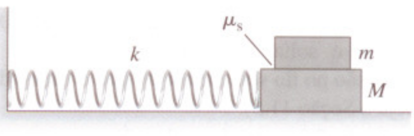


Figura 13.36 Problema 13.68.

13.69 Uma massa de 10,0 kg está se deslocando para a direita com uma velocidade igual a 2,0 m/s sobre uma superfície horizontal quando colide com uma segunda massa inicialmente em repouso, mas presa a uma mola leve de constante 80,0 N/m. A primeira massa gruda-se à segunda. (a) Calcule a freqüência, a amplitude e o período das oscilações subseqüentes. (b) Quanto tempo leva para o sistema retornar pela primeira vez à posição em que estava imediatamente depois da colisão?

13.70 Um foguete sobe com aceleração igual a 4,0 m/s^2 a partir da plataforma de lançamento na Terra. Dentro do foguete, uma pequena esfera de 1,50 kg está pendurada no teto por um fio leve de 1,10 m. Se a esfera for deslocada 8,50° da vertical e solta, ache a amplitude e o período da oscilação resultante desse pêndulo.

13.71 Um objeto quadrado de massa m é formado de quatro varetas finas idênticas, todas de comprimento L, amarradas juntas. Esse objeto é pendurado em um gancho pelo seu canto superior (Figura 13.37). Se ele for girado levemente para a esquerda e depois solto, em que freqüência ele irá oscilar para a frente e para trás?

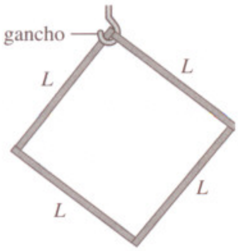


Figura 13.37 Problema 13.71.

13.72 Um bloco de massa igual a 0,200 kg está submetido a uma força restauradora elástica e a constante da força é igual a 10,0 N/m. a) Faça um gráfico da energia potencial elástica U em função do deslocamento x no intervalo de $x = -0{,}300$ m até $x = +0{,}300$ m. Em seu gráfico, adote a escala 1 cm = 0,05 J no eixo vertical e 1 cm = 0,05 m no eixo horizontal. O bloco inicia o movimento oscilatório com uma energia potencial igual a 0,140 J e uma energia cinética igual a 0,060 J. Examinando o gráfico, responda às perguntas seguintes. b) Qual é a amplitude da oscilação? c) Qual é a energia potencial quando o deslocamento é igual à metade da amplitude? d) Para qual deslocamento a energia potencial é igual à energia cinética? e) Qual é o valor do ângulo de fase ϕ, sabendo que a velocidade inicial é positiva e o deslocamento inicial é negativo?

13.73 Um balde de massa igual a 2,0 kg contendo 10,0 kg de água está pendurado em uma mola vertical ideal de constante 125 N/m e oscilando para cima e para baixo com uma amplitude igual a 3,0 cm. De repente, surge um vazamento no fundo do balde de tal modo que a água escoa à taxa constante de 2,0 g/s. Quando o balde estiver cheio até a metade, ache (a) o período de oscilação e (b) a taxa em que o período está variando em relação ao tempo. O período está aumentando ou diminuindo? (c) Qual é o período mais curto que esse sistema pode ter?

13.74 Um fio de 1,80 m de comprimento é suspenso verticalmente. Quando uma bola de aço de 60,0 kg é suspensa na extremidade do fio, este se dilata 2,0 m. Se a bola for puxada para baixo a uma distância adicional e solta, com que freqüência ela oscilará? Suponha que a tensão no fio seja menor do que o limite de proporcionalidade (veja a Seção 11.5).

13.75 Uma perdiz de 5,0 kg está pendurada em uma pereira por uma mola ideal de massa desprezível. Quando a perdiz é puxada para baixo a uma distância de 0,100 m abaixo da sua posição de equilíbrio e libertada, ela oscila com um período igual a 4,20 s. a) Qual é sua velocidade quando ela passa pela posição de equilíbrio? b) Qual é sua aceleração quando ela está a 0,050 m acima da posição de equilíbrio? c) Quando ela está se movendo para cima, quanto tempo é necessário para que ela se mova de um ponto 0,050 m abaixo da posição de equilíbrio até um ponto 0,050 m acima do equilíbrio? d) O movimento da perdiz é interrompido e ela é removida da mola. De quanto a mola se encurta?

13.76 Um parafuso de 0,0200 kg executa um MHS com amplitude igual a 0,240 m e período igual a 1,500 s. O deslocamento do parafuso é igual a +0,240 m quando $t = 0$. Calcule: a) o deslocamento do parafuso quando $t = 0{,}500$ s; b) o módulo, a direção e o sentido da força que atua sobre o parafuso quando $t = 0{,}500$ s; c) o tempo mínimo necessário para que o parafuso se desloque da posição inicial até um ponto $x = -0{,}180$ m; d) a velocidade do parafuso quando $x = -0{,}180$ m.

13.77 **MHS da balança de um açougue.** Uma mola de massa desprezível e constante $k = 400$ N/m está suspensa verticalmente, e um prato de 0,200 kg está suspenso em sua extremidade inferior. Um açougueiro deixa cair sobre o prato, de uma altura de 0,40 m, uma posta de carne de 2,2 kg. A posta de carne produz uma colisão totalmente inelástica com o prato e faz o sistema executar um MHS. Calcule: a) a velocidade do prato e da carne logo após a colisão; b) a amplitude da oscilação subseqüente; c) o período do movimento.

13.78 Uma viga uniforme é suspensa horizontalmente por duas molas verticais idênticas que estão presas entre o teto e ambas as extremidades da viga. A viga possui massa igual a 225 kg, e um saco de cascalho de 175 kg descansa sobre seu centro. A viga está oscilando em MHS, com uma amplitude de 40,0 cm e uma freqüência de 0,600 ciclos/s. (a) O saco de cascalho cai da viga quando a viga atinge o seu máximo deslocamento para cima. Quais são a freqüência e a amplitude do MHS subseqüente da viga? (b) Se, em vez disso, o cascalho cair quando a viga atingir sua velocidade máxima, quais serão a freqüência e a amplitude do MHS subseqüente da viga?

13.79 No planeta Newtonia, um pêndulo simples com um peso de massa 1,25 kg e um comprimento de 185,0 cm, quando libertado a partir do repouso, leva 1,42 s para oscilar de um ângulo de 12,5°, e então volta a ter velocidade igual a zero. A circunferência de Newtonia mede 51400 km. Qual é a massa do planeta Newtonia?

13.80 Uma força de 40,0 N estica uma mola vertical de 0,250 m. a) Qual é o valor da massa que deve ser suspensa da mola para que o sistema oscile com um período igual a 1,0 s? b) Se a amplitude do movimento for igual a 0,050 m e o período for o especificado na parte (a), onde estará o objeto e em qual sentido ele estará se movendo 0,35 s depois de atravessar a posição de equilíbrio de cima para baixo? c) Qual é o módulo, a direção e o sentido da força que a mola exerce sobre o objeto quando ele está 0,030 m abaixo da posição de equilíbrio, movendo-se para cima?

13.81 **Não perca o barco.** Em visita a Minnesota (a 'terra dos dez mil lagos'), você se inscreve em uma excursão ao redor de um dos maiores lagos. Ao chegar ao cais onde o barco de 1500 kg está ancorado, você descobre que o barco está oscilando com as ondas, para cima e para baixo, executando um movimento harmônico simples com amplitude igual a 20 cm. O barco leva 3,5 s para completar um ciclo de oscilação. Quando o barco está em seu ponto mais alto, o convés está na mesma altura que o cais. Enquanto observa o barco oscilando, você, que possui uma massa de 60 kg, começa a se sentir um pouco tonto, em parte por ter comido peixe demais no jantar. Em conseqüência, você se recusa a embarcar a não ser que o nível do convés esteja a 10 cm ou menos do nível do cais. Quanto tempo você tem para embarcar confortavelmente a cada ciclo do MHS?

13.82 Um exemplo interessante de oscilação, embora impraticável, é o movimento de um objeto que é deixado cair em um furo que atravessa a Terra de um extremo ao outro, passando pelo centro. Usando a hipótese (que não é realista) de que a Terra seja uma esfera com densidade uniforme, prove que o movimento é harmônico simples (MHS) e determine seu período. (*Observação:* A força gravitacional que atua sobre o objeto em função da distância r ao centro da Terra foi calculada no Exemplo 12.10 (Seção 12.6). O movimento é harmônico simples quando a aceleração a_x e o deslocamento do equilíbrio x são relacionados pela Equação (13.8), e o período é então dado por $T = 2\pi/\omega$.)

13.83 Dois corpos puntiformes de massa m são mantidos a uma distância d um do outro. Outro corpo puntiforme de massa M está a meio caminho entre eles. M é então deslocado de uma pequena distância x perpendicular à linha que une os dois corpos fixos e é libertado. (a) Mostre que o módulo da força gravitacional resultante sobre M exercida pelos corpos fixos é dada aproximadamente por $F_x = \dfrac{16\,GmMx}{d^3}$, se $x \ll$. Qual é a direção e sentido dessa força? Trata-se de uma força restauradora ou não? (b) Mostre que a massa M irá oscilar com freqüência angular $(4/d)\sqrt{Gm/d}$ e período $\pi d/2\sqrt{d/Gm}$. (c) Qual seria o período se $m = 100$ kg e $d = 25{,}0$ cm? Será que você poderia medir facilmente esse período? O que impede que esse experimento seja facilmente executado em um laboratório de física comum? (d) M oscilará se for deslocada do centro de uma pequena distância x no sentido de qualquer um dos corpos fixos? Por quê?

13.84 Para um certo oscilador, a força resultante sobre um corpo de massa m é dada por $F_x = -cx^3$. a) Qual é a função energia potencial desse oscilador se considerarmos $U = 0$ para $x = 0$? b) Um quarto do período é o tempo necessário para o corpo se deslocar de $x = 0$ até $x = A$. Calcule esse tempo e, portanto, o período. [*Sugestão:* Comece com a Equação (13.20) modificada para incluir a função energia potencial obtida na parte (a) e explicite v_x em função de x. A seguir substitua v_x por dx/dt. Isole a variável passando todos os fatores que contenham x para um lado e todos os fatores que contenham t para o outro, de modo que os dois lados possam ser integrados. Na integral envolvendo x, faça a mudança de variável $u = x/A$. A equação resultante pode ser calculada usando-se programas de computador e o resultado é $\int_0^1 du/\sqrt{1-u^4} = 1{,}31$.] c) De acordo com o resultado obtido na parte (b), verifique se o período depende da amplitude A do movimento. Esse movimento constitui um MHS?

13.85 Considere o círculo de referência indicado na Figura 13.6. O componente x da velocidade do ponto Q é a velocidade do ponto P. Calcule esse componente e mostre que a velocidade do ponto P é dada pela Equação (13.15).

***13.86 Molécula diatômica.** Dois átomos idênticos de uma molécula diatômica vibram como osciladores harmônicos. Contudo, o centro de massa situado na metade da distância entre os átomos permanece em repouso. a) Mostre que em qualquer instante os momentos lineares dos átomos são dados por $\vec{p}$ e $-\vec{p}$. b) Mostre que a energia cinética K dos dois átomos em qualquer instante é igual à energia cinética de um único objeto de massa $m/2$ com um momento linear de módulo igual a p. (Use $K = p^2/2m$.) Esse resultado mostra por que usamos $m/2$ na expressão de f no Exemplo 13.7 (Seção 13.4). c) Se os átomos não forem idênticos, mas possuírem massas m_1 e m_2, mostre que o resultado da parte (a) ainda permanece válido e na parte (b) a massa do único objeto é dada por $m_1m_2/(m_1 + m_2)$. A grandeza $m_1m_2/(m_1 + m_2)$ denomina-se *massa reduzida* do sistema.

***13.87** Uma expressão aproximada para a energia potencial de uma molécula de KCl é $U = A[(R_0{}^7/8r^8) - 1/r]$, onde $R_0 = 2{,}67 \times 10^{-10}$ m e $A = 2{,}31 \times 10^{-28}$ J · m. Usando essa aproximação: a) Mostre que o componente radial da força sobre cada átomo é dado por $F_r = A[(R_0^7/r^9) - 1/r^2]$. b) Mostre que R_0 é a separação de equilíbrio. c) Ache a energia potencial mínima. d) Faça $r = R_0 + x$ e use os dois primeiros termos do desenvolvimento do teorema binomial na Equação (13.28) para demonstrar que $F_r \approx -(7A/R_0^3)x$, de modo que a constante da força é dada por $k = 7A/R_0^3$. (e) Como o átomo de K e o átomo de Cl vibram em sentidos opostos em lados opostos do centro de massa da molécula, $m_1m_2/(m_1 + m_2) = 3{,}06 \times 10^{-26}$ kg é a massa que você deve usar para calcular a freqüência. (Veja o Problema 13.86.) Calcule a freqüência das oscilações com amplitudes pequenas.

13.88 Dois cilindros homogêneos de raio R e massa total M são conectados ao longo de seu eixo comum por uma barra leve e curta, e estão em repouso sobre uma mesa horizontal. Uma mola cuja constante é k possui uma extremidade presa na mesa por uma braçadeira e sua outra extremidade é ligada a um anel sem atrito no centro de massa dos cilindros (Figura 13.38). Os cilindros são puxados para a esquerda esticando a mola até uma distância x, e a seguir são libertados. Existe entre o topo da mesa e os cilindros um atrito suficiente para fazer os cilindros rolarem sem deslizar à medida que eles oscilam na extremidade da mola. Mostre que o movimento do centro de massa dos cilindros é um MHS, e calcule o seu período em termos de M e de k. (*Sugestão*: O movimento é harmônico simples quando a aceleração a_x e o deslocamento x são relacionados mediante a Equação (13.8) e o período é então dado por $T = 2\pi/\omega$. Aplique as relações $\Sigma\tau_z = I_{cm}\alpha_z$ e $\Sigma F_x = Ma_{cmx}$ para os cilindros a fim de obter uma relação entre a_{cmx} e o deslocamento x dos cilindros de sua posição de equilíbrio.]

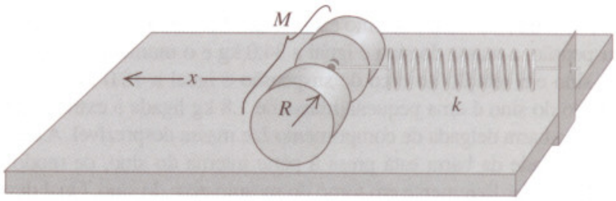


Figura 13.38 Problema 13.88.

13.89 Na Figura 13.39, a esfera de cima é libertada a partir do repouso, colide com a esfera de baixo, que está em repouso, e gruda-se a ela. Ambas as molas têm 50,0 cm de comprimento. A esfera de cima possui uma massa de 2,0 kg e está inicialmente a uma altura 10,0 cm acima da esfera de baixo, cuja massa é igual a 3,0 kg. Ache a freqüência e o deslocamento angular máximo do movimento após a colisão.

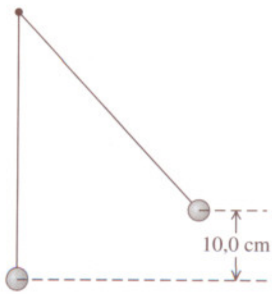


Figura 13.39 Problema 13.89.

13.90 T. rex. Considere a perna do *T. rex* do Exemplo 13.10 (Seção 13.6) duas barras uniformes, ambas com 1,55 m de comprimento, com uma extremidade fixa rigidamente à outra. Suponha que a barra inferior possua uma massa M e a barra superior tenha uma massa igual a $2M$. O conjunto gira ao redor do topo da barra superior. Calcule a oscilação desse conjunto para oscilações de pequena amplitude. Compare os seus resultados com os do Exemplo 13.10.

13.91 Uma barra metálica delgada e homogênea de massa M possui um pivô em seu centro por onde passa um eixo perpendicular à barra. Uma mola horizontal cuja constante é k possui uma extremidade presa na parte inferior da barra e sua outra extremidade está rigidamente presa a um suporte. Quando a barra é deslocada formando um pequeno ângulo θ com a vertical (Figura 13.40) e libertada, mostre que a oscilação é um movimento harmônico angular e calcule seu período. (*Sugestão*: Suponha que o ângulo θ seja suficientemente pequeno para que as relações sen $\theta \approx \theta$ e cos $\theta \approx 1$ sejam aproximadamente válidas. O movimento é harmônico simples quando $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$ e o período é então dado por $T = 2\pi/\omega$.)

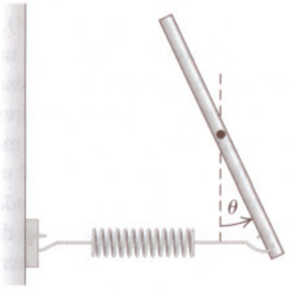


Figura 13.40 Problema 13.91.

13.92 Problema do sino silencioso. Um sino grande está suspenso em uma viga de madeira de forma que possa oscilar com atrito desprezível. O centro de massa do sino está situado 0,60 m abaixo do eixo de suspensão, a massa do sino é igual a 34,0 kg e o momento de inércia do sino em relação ao eixo de suspensão é igual a 18,0 kg · m^2. O badalo do sino é uma pequena massa de 1,8 kg ligada à extremidade de uma barra delgada de comprimento L e massa desprezível. A outra extremidade da barra está presa à parte interna do sino, de modo a poder oscilar livremente em torno do mesmo eixo do sino. Qual deve ser o comprimento L da barra delgada do badalo do sino para que ele toque silenciosamente, ou seja, para que o período da oscilação do sino seja igual ao período da oscilação do badalo?

13.93 Duas hastes delgadas, cada uma delas com massa m e comprimento L, são conectadas perpendicularmente de modo a formarem um objeto em forma de L. Esse objeto é equilibrado no topo de uma aresta aguda (Figura 13.41). Quando o objeto em forma de L é deslocado ligeiramente, ele oscila. Ache a freqüência da oscilação.

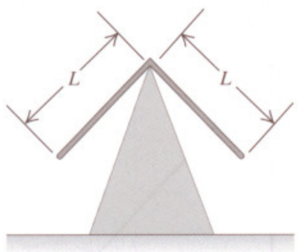


Figura 13.41 Problema 13.93.

13.94 Você deseja construir um pêndulo com um período de 4,00 s em um local onde g = 9,80 m/s^2. a) Qual é o comprimento de um pêndulo *simples* com esse período? b) Suponha que o pêndulo deve ser montado em uma caixa que não possui mais do que 0,50 m de altura. Você pode imaginar um pêndulo que tenha um período de 4,0 s e que satisfaça a essa condição?

13.95 Uma barra uniforme de comprimento L oscila com ângulos pequenos em torno de um ponto situado a uma distância x do seu centro de massa. a) Prove que a freqüência angular é $\sqrt{gx/[(L^2/12) + x^2]}$. b) Prove que sua freqüência angular máxima ocorre quando $x = L/\sqrt{12}$. c) Qual é o comprimento da barra quando a freqüência angular máxima é igual a 2π rad/s?

Problemas desafiadores

13.96 Duas molas, cada uma com um comprimento sem deformação igual a 0,200 m, porém com constantes diferentes de equilíbrio, k_1 e k_2, são ligadas às extremidades opostas de um bloco de massa m apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. As extremidades externas das molas são agora ligadas a dois pinos P_1 e P_2 igualmente afastados de 0,100 m da extremidade externa original de cada mola (Figura 13.42). Seja k_1 = 2,0 N/m, k_2 = 6,0 N/m e m = 0,100 kg. a) Ache o comprimento de cada mola quando o bloco atinge a nova posição de equilíbrio depois da ligação das extremidades das molas aos pinos. b) Ache o período das oscilações do bloco quando ele é deslocado da nova posição e a seguir libertado.

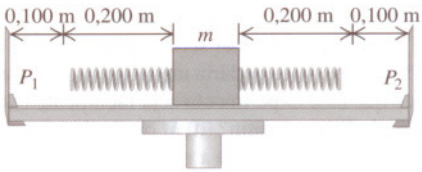


Figura 13.42 Problema desafiador 13.96.

13.97 A constante elástica efetiva de duas molas. Duas molas, ambas com o mesmo comprimento sem deformação, porém com constantes diferentes k_1 e k_2, são ligadas a um bloco de massa m apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. Determine a constante efetiva da força k_{ef} para cada um dos três casos (a), (b) e (c) indicados na Figura 13.43. (A constante efetiva da força é obtida pela definição $\Sigma F_x = -k_{ef}x$.) d) Um objeto de massa m, suspenso da extremidade de uma mola cuja constante é k, oscila com uma freqüência f_1. Se a mola for cortada em duas metades e o mesmo objeto for suspenso em uma das metades, a freqüência da oscilação será f_2. Qual é a razão f_2/f_1?

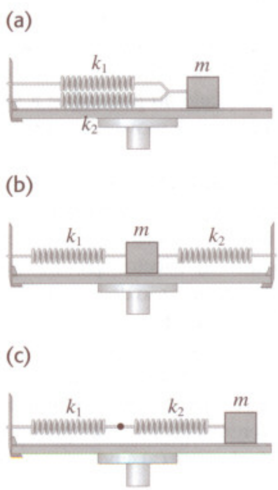


Figura 13.43 Problema desafiador 13.97.

13.98 a) Qual é a variação ΔT do período de um pêndulo simples quando a aceleração da gravidade g varia de Δg? (*Sugestão:* O novo período $T + \Delta T$ é obtido substituindo-se $g + \Delta g$ no lugar de g:

$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + \Delta g}}$$

Para obter uma expressão aproximada, desenvolva em série o fator $(g + \Delta g)^{-1/2}$ usando o teorema binomial (Apêndice B) e mantendo apenas os dois primeiros termos:

$$(g + \Delta g)^{-1/2} = g^{-1/2} - \frac{1}{2}g^{-3/2}\Delta g + \cdots$$

Os outros termos contêm potências mais elevadas de Δg e são muito pequenos se Δg for pequeno.) Expresse o seu resultado como uma variação *fracionária* do período $\Delta T/T$ em função da variação fracionária $\Delta g/g$. b) Um relógio de pêndulo mede corretamente o tempo em um local onde $g = 9{,}8000$ m/s^2, mas verifica-se que ele atrasa 4,0 s por dia em um local mais elevado. Use o resultado da parte (a) para calcular o valor de g nesse novo local.

13.99 Mola com massa. Em todos os problemas anteriores deste capítulo consideramos molas com massas desprezíveis. Porém, é claro que toda mola possui alguma massa. Para estudar o efeito da massa da mola, considere uma mola de massa M, comprimento de equilíbrio L_0 e constante k. Quando ela é comprimida ou esticada até atingir um comprimento L, a energia potencial é $\frac{1}{2}kx^2$, onde $x = L - L_0$. a) Considere uma mola como descrito anteriormente, porém, com uma extremidade fixa e a outra se deslocando com velocidade v. Suponha que a velocidade ao longo dos pontos do comprimento da mola varie linearmente com a distância l a partir da extremidade fixa. Suponha também que a massa M da mola seja distribuída uniformemente ao longo do comprimento da mola. Calcule a energia cinética da mola em termos de M e de v. (*Sugestão:* Divida a mola em pedaços de comprimento dl; ache a velocidade de cada pedaço em termos de l, v e L; calcule a massa de cada pedaço em termos de dl, M e L e integre de 0 até L. O resultado *não* é $\frac{1}{2}Mv^2$, visto que a mola não se move com a mesma velocidade em todas as partes.) b) Tome a derivada em relação ao tempo da lei da conservação da energia, Equação (13.21), para um corpo de massa m preso a uma mola *sem massa*. Comparando os resultados que você obteve com a Equação (13.8) que definiu ω, mostre que a freqüência angular da oscilação é $\omega = \sqrt{k/m}$. c) Aplique o procedimento indicado na parte (b) para obter a freqüência angular da oscilação ω da mola considerada na parte (a). Se a *massa efetiva* da mola M' for definida por $\omega = \sqrt{k/M'}$, como se escreve M' em termos de M?

13.100 Uma régua uniforme de 1,0 m está suspensa por uma de suas extremidades em um eixo horizontal e oscila como um pêndulo físico. Um objeto muito pequeno com massa igual à da régua pode permanecer preso à régua em um ponto situado a uma distância y abaixo do eixo de suspensão. Seja T o período do pêndulo com o objeto preso na régua e T_0 o período do pêndulo da régua sozinha. a) Qual é a razão T/T_0? Calcule sua expressão para y variando de 0 até 1,0 m em intervalos de 0,1 m e faça um gráfico de T/T_0 em função de y. b) Existe algum valor de y além de $y = 0$, para o qual $T = T_0$? Caso exista, encontre esse valor e explique por que o período não muda quando y atinge esse valor.

13.101 Sua medida do período de um pêndulo físico em torno de um dado eixo indica um valor T. A seguir você usa outro eixo de suspensão do lado oposto do centro de massa e encontra o mesmo período. Os dois pontos estão separados por uma distância L. Use o teorema dos eixos paralelos para mostrar que $g = L(2\pi/T)^2$. (Esse resultado mostra um método para a determinação do valor de g sem o conhecimento da massa ou de qualquer momento de inércia do pêndulo físico.)

13.102 Ressonância em um sistema mecânico. Um bloco de massa m está preso à extremidade de uma mola sem massa cuja constante é k e comprimento de equilíbrio igual a l_0. A outra extremidade da mola pode girar livremente em torno de um prego cravado em uma superfície horizontal sem atrito (Figura 13.44). O bloco gira em um círculo com uma freqüência angular de revolução ω'. a) Determine o comprimento l da mola em função de ω'. b) O que ocorre com o resultado da parte (a) quando ω' se aproxima da freqüência natural $\omega = \sqrt{k/m}$ do sistema massa-mola? (Se o resultado o incomoda, lembre que molas sem massa e superfícies sem atrito não existem; são apenas descrições aproximadas de molas e superfícies reais. Além disso, a lei de Hooke é ela própria uma aproximação do comportamento das molas reais; quanto maior for a deformação da mola, maior será o desvio da lei de Hooke.)

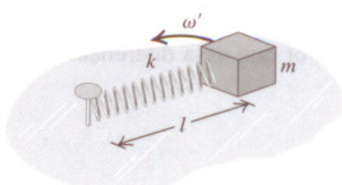


Figura 13.44 Problema desafiador 13.102.

***13.103 Vibração de molécula com ligação covalente.** Muitas moléculas diatômicas são mantidas unidas por *ligações covalentes* que são muito mais fortes do que a interação de van der Waals. Exemplos dessas moléculas incluem H_2, O_2 e N_2. As experiências mostram que, em muitas dessas moléculas, a interação pode ser descrita por uma força da forma

$$F_r = A\left[e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}\right]$$

onde A e b são constantes positivas, r é a distância entre os centros dos dois átomos e R_0 é a separação de equilíbrio. Para a molécula de hidrogênio (H_2), $A = 2{,}97 \times 10^{-8}$ N, $b = 1{,}95 \times 10^{10}$ m e $R_0 = 7{,}4 \times 10^{-11}$m. Calcule a constante da força para pequenas oscilações em torno do equilíbrio. (*Sugestão:* Consulte o Apêndice B e use o desenvolvimento em série da função e^x.) Compare o seu resultado com o valor dado no Exercício 13.40.