

Sistemas quânticos abertos fora do equilíbrio

Gabriel T. Landi

Universidade Estadual de Londrina

20 de maio de 2016

Sistemas abertos: atrito/viscosidade

- ◆ Perguntas simples as vezes possuem respostas complicadas.
- ◆ Estamos acostumados a lidar com o atrito/viscosidade na mecânica clássica.
- ◆ Por exemplo, a 2a lei de Newton para um paraquedista pode ser escrita como

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

- ◆ Esta é uma fórmula *empírica*.
 - ◆ Inclusive, sabe-se que em altas velocidades ela deixa de ser válida.
- ◆ Do ponto de vista da engenharia, não há muito problema.
 - ◆ Ao desenhar um avião, usamos um programa que tem tabelado valores da viscosidade do ar para diferentes materiais e geometrias.
- ◆ Mas do ponto de vista da física, como podemos *entender* este efeito?
 - ◆ Este é o objetivo da física, assim como todas as outras ciências naturais: ***entender***.

Do micro ao macro

- ◆ Para entender a viscosidade, precisamos olhar para o mundo microscópico.
- ◆ Sabemos hoje que a viscosidade tem origem na interação (eletrostática) entre o nosso material e as moléculas do ar.
- ◆ É como um urso sendo picado por abelhas.



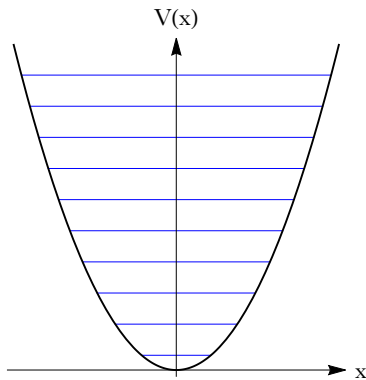
- ◆ A picada de uma única abelha pode ser irrelevante, mas a picada de diversas abelhas produz um efeito *macroscópico*.
- ◆ **Fenômeno emergente.**

Dissipação e flutuação

- ◆ A viscosidade (dissipação) é na verdade um aspecto de um fenômeno mais geral.
- ◆ Quando um sistema é suficientemente pequeno, os "chutes" de cada molécula podem ser suficientes para produzir deslocamentos observáveis.
 - ◆ **Movimento browniano** (video)
- ◆ Descoberto por um botanista, Robert Brown, em 1827.
 - ◆ Oscilações incessantes de grãos de pólen em líquidos.
- ◆ Ocorre com todos os materiais;
 - ◆ Mas em materiais macroscópicos as flutuações se tornam muito pequenas e observamos apenas a viscosidade.
- ◆ O movimento Browniano é o exemplo mais famoso de um **processo estocástico**.
 - ◆ Evolução temporal com fatores aleatórios.

Sistemas quânticos abertos

- ◆ Quem já estudou mecânica quântica certamente percebeu que em nenhum momento há atrito no sistema.
- ◆ Descrever o atrito na mecânica quântica é muito mais difícil.
- ◆ Exemplo mais simples: oscilador harmônico.
 - ◆ Níveis discretos de energia: $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$



- ◆ A dinâmica deste sistema, quando sujeito a um atrito, ocorre através de transições entre os níveis eletrônicos.
 - ◆ **Processo estocástico quântico.**



Emissão e absorção

◆ Seja $\bar{N}$ o número médio de quanta no oscilador harmônico [lembre-se: $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$]

◆ As *taxas de transição* são

$$\text{Prob}(n \rightarrow n + 1) = \Delta t \bar{N} (n + 1)$$

$$\text{Prob}(n \rightarrow n - 1) = \Delta t (\bar{N} + 1) n$$

◆ $n \rightarrow n + 1$ significa *absorção*.

◆ O oscilador absorve um fóton e pula para um nível excitado.

◆ $n \rightarrow n - 1$ significa *emissão*.

◆ O sistema emite um fóton e cai para um nível inferior.

◆ Quando $n = 1 \rightarrow$ emissão espontânea:

◆ O sistema naturalmente decai do estado $n = 1 \rightarrow n = 0$.

◆ Mas quando $n > 1 \rightarrow$ emissão estimulada:

◆ Quanto maior n , maior a probabilidade de emissão.

Formalismo de Lindblad e segunda quantização

- ◆ Existem diversas formas de descrever sistemas quânticos abertos.
- ◆ A minha favorita é a forma de Lindblad, que é baseada na discussão anterior sobre o oscilador harmônico.
- ◆ O número n que aparecia no oscilador harmônico passa a representar o número de partículas em um certo estado.
 - ◆ Por exemplo, podemos falar em $n_{\mathbf{p}}$ que representa “o número de partículas com momento $\mathbf{p}$ ”
- ◆ A descrição do sistema é então feita descrevendo como estes números de ocupação evoluem no tempo e como os diferentes estados interagem uns com os outros.
 - ◆ Essa teoria se chama segunda quantização.
 - ◆ Ela é a base para a física da matéria condensada e a física de partículas.
 - ◇ Todos os estudantes deviam aprender segunda quantização no colegial!!
- ◆ O formalismo de Lindblad é uma maneira de descrever a troca de partículas e energia entre o sistema e o ambiente.
- ◆ É importante diferenciar entre *Bósons* e *Férmions*:
 - ◆ Férmions: possuem spin semi-inteiro. Satisfazem o princípio da exclusão de Pauli
 - ◇ $n_i = 0$ ou 1
 - ◆ Bósons: possuem spin inteiro. Não satisfazem o PEP.
 - ◇ $n_i = 0, 1, 2, 3, \dots$
- ◆ Detalhe técnico (não saiam correndo!):
 - ◆ No formalismo de Lindblad modificamos a eq. de von Neumann, adicionando um termo que descreve o acoplamento com o ambiente.

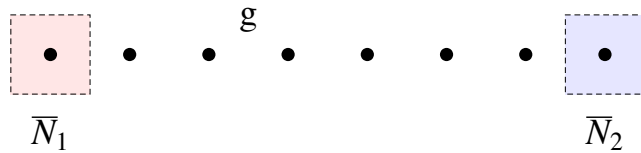
$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + D(\rho)$$

$$D(\rho) = \gamma \sum_{\alpha} \left[(1 \pm \bar{N}_{\alpha}) \left(a_{\alpha} \rho a_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}, \rho\} \right) + \bar{N}_{\alpha} \left(a_{\alpha}^{\dagger} \rho a_{\alpha} - \frac{1}{2} \{a_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger}, \rho\} \right) \right]$$

Aplicações para sistemas fora do equilíbrio

Fluxo através de uma cadeia.

- ◆ Considere uma cadeia 1D através da qual partículas podem pular de um sítio para o outro.
- ◆ As extremidades da cadeia estão conectadas a reservatórios mantidos usando temperaturas distintas.



- ◆ Neste caso haverá uma *corrente* de partículas/energia através da cadeia.
- ◆ Este problema é o exemplo típico de um **NESS**: non-equilibrium steady-state.
 - ◆ É um “steady-state” pois as coisas não estão mais mudando no tempo.
 - ◆ Mas não é um estado de equilíbrio devido à existência de uma corrente.
- ◆ A corrente de partículas através deste sistema pode ser calculada analiticamente e vale:

$$\mathcal{J} = \frac{g\gamma}{g^2 + \gamma^2} (\bar{N}_1 - \bar{N}_2)$$

g = probabilidade de tunelamento

γ = acoplamento com o banho

- ◆ Ou seja, o fluxo depende apenas da diferença entre as ocupações dos sítios das bordas.
- ◆ Este resultado vale tanto para Férmions quanto para Bósons.

A. Asadian, *et. al.*, *PRE*, **87**, 012109 (2013)

G. T. Landi, *et. al.*, *PRE*, **90**, 042142 (2014)

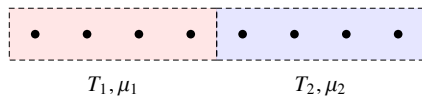
- ◆ Este é um exemplo de um fluxo *balístico*: não depende do tamanho do sistema.
- ◆ A corrente elétrica em um material não é balística; ela é *difusiva*. Da lei de Ohm,

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{(L\rho/A)} \propto \frac{1}{L}$$

- ◆ Se você duplica o tamanho do seu fio, a corrente cai pela metade.
- ◆ No nosso caso $\mathcal{J}$ não depende de L .

Banhos de múltiplos sítios

- ◆ Considere agora o caso onde temos uma cadeia dividida em duas partes.
- ◆ Cada parte é mantida em contato com um reservatório diferente.
 - ◆ Temperatura T
 - ◆ Potencial químico μ



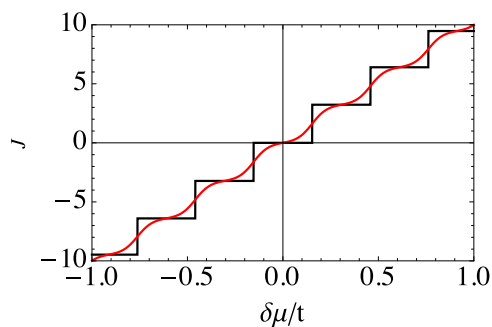
- ◆ Os números de ocupação de cada cadeia são definidos pela distribuição de Fermi-Dirac

$$\bar{N}_k = \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/T} + 1}$$

- ◆ Neste caso a corrente através das cadeias assume a forma de Landauer-Büttiker para a condução balística de elétrons em estruturas mesoscópicas.

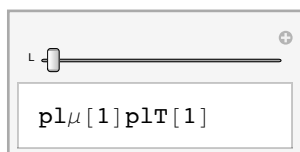
- ◆ Quantização da condutância.

$$G = \frac{e^2}{h}$$



P. H. Guimarães, G. T. Landi and M. J. de Oliveira, *submetido ao PRE* (2016)

- ◆ A corrente em função do potencial químico passa a ser muito sensível ao tamanho da cadeia.



Cadeias de spin

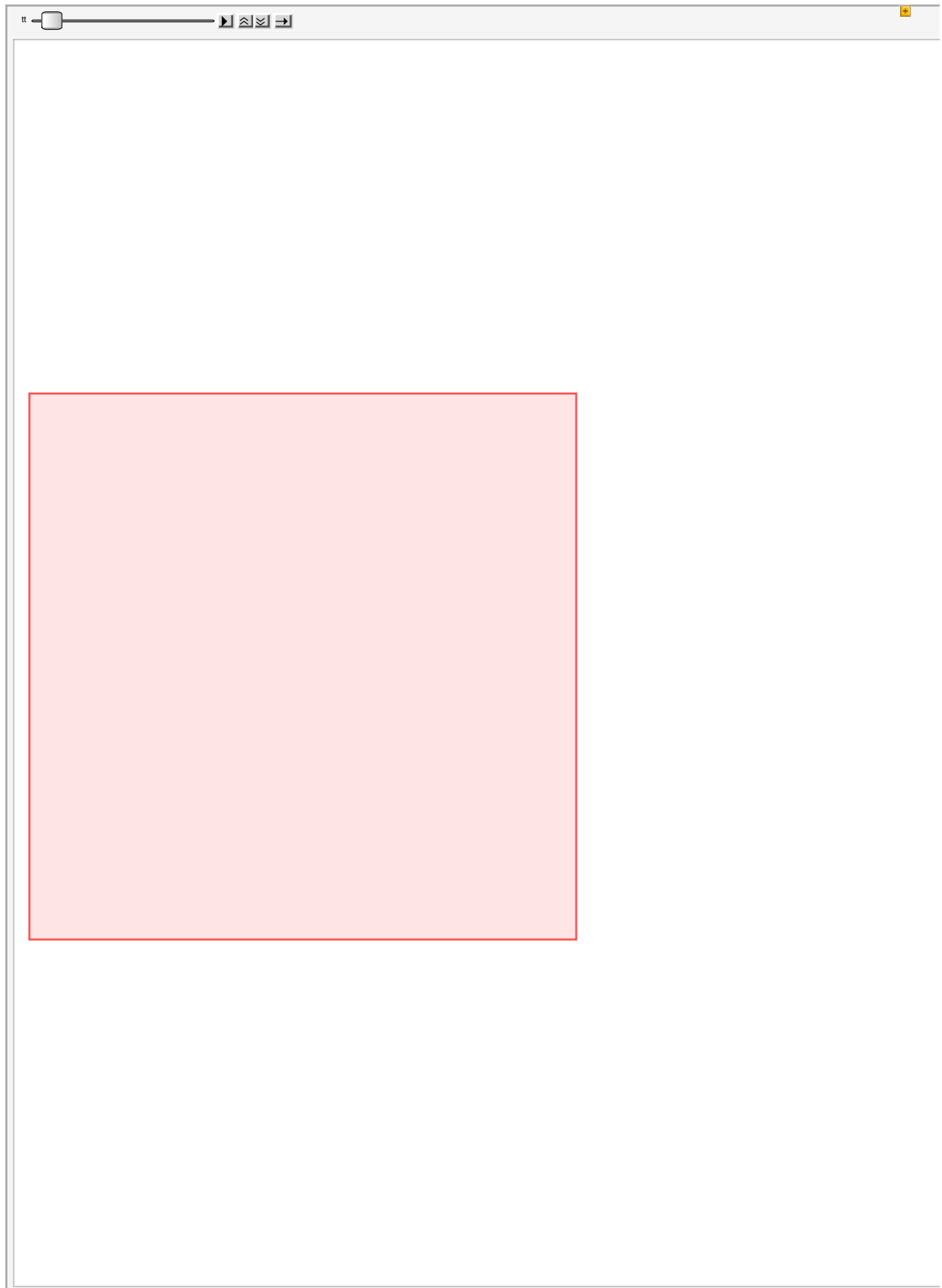
- ◆ Um material magnético pode ser visto como vários spins alinhados na mesma direção.
- ◆ Os spins se alinham devido a uma interação entre eles (chamada interação de troca).



- ◆ Suponha agora que você dê um chute no primeiro spin.



- ◆ O segundo spin vai sentir este chute, devido à interação de troca.
- ◆ Consequentemente, ele irá se mover de alguma maneira.
- ◆ Esse movimento será sentido pelo terceiro spin, e assim por diante.



- ◆ No final teremos uma *onda* se propagando pelo material.
 - ◆ Essa é uma *onda de spin*.
- ◆ Note que não há nenhuma partícula se propagando. Todos os spins estão parados.

- ◆ Mas, mesmo assim, há a propagação de uma onda.
- ◆ É como uma ola no estádio de futebol!
- ◆ Ao estudarmos este fenômeno usando a mecânica quântica, descobrimos que estas onda são **quantizadas**.
- ◆ Um quanta de onda de spin se chama um **magnon**.
- ◆ Para todos os fins e efeitos um magnon se comporta como uma partícula.
- ◆ Essa é a grande beleza da matéria condensada:
 - ◆ Sistemas diferentes muitas vezes satisfazem leis parecidas.
 - ◆ “The same equations have the same solutions”, *Feynman*.

Circuitos magnônicos

- ◆ É possível construir dispositivos que funcionam com magnons ao invés de elétrons.
- ◆ Recentemente foi proposto um transistor magnônico.



ARTICLE

Received 16 May 2013 | Accepted 15 Jul 2014 | Published 21 Aug 2014

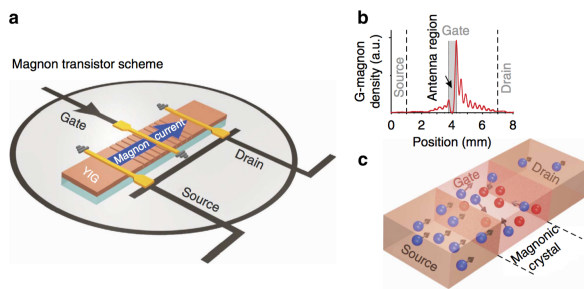
DOI: 10.1038/ncomms5700

OPEN

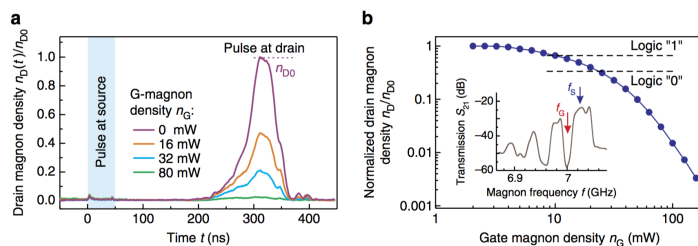
Magnon transistor for all-magnon data processing

Andrii V. Chumak¹, Alexander A. Serga¹ & Burkard Hillebrands¹

- ◆ As correntes de magnons são geradas através de micro-antenas que produzem um campo magnético AC.
- ◆ O filme de YIG é modificado de tal maneira a permitir somente a propagação de alguns tipos de magnons.



- ◆ Os magnons vermelhos ficam aprisionados e os magnons azuis se propagam livremente.
- ◆ A densidade de magnons vermelhos controla as colisões entre magnons, controlando portanto a corrente de magnons.
- ◆ “All magnon transistor”



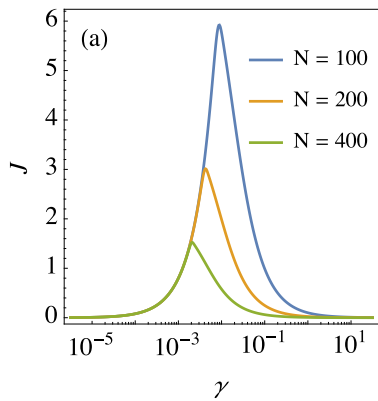
Porta lógica magnônica

- Recentemente fomos capazes de encontrar uma solução exata para o fluxo através da cadeia de Heisenberg.

- Este é um modelo que inclui a *interação* entre os magnons.

G. T. Landi and D. Karevski, *PRB* **91**, 174422 (2015)

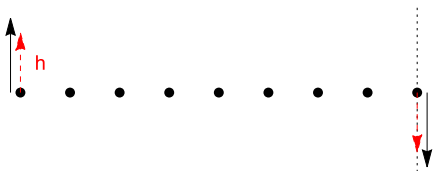
- Observamos que o fluxo agora depende da constante γ (a taxa com que injetamos magnons no sistema)



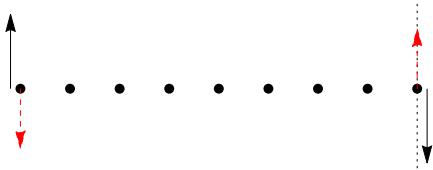
- Em seguida estudamos o que ocorre quando aplicamos campos magnéticos apenas nas extremidades.

- Dependendo do sinal do campo h , existem duas opções:

- O campo na mesma direção do polarizador.

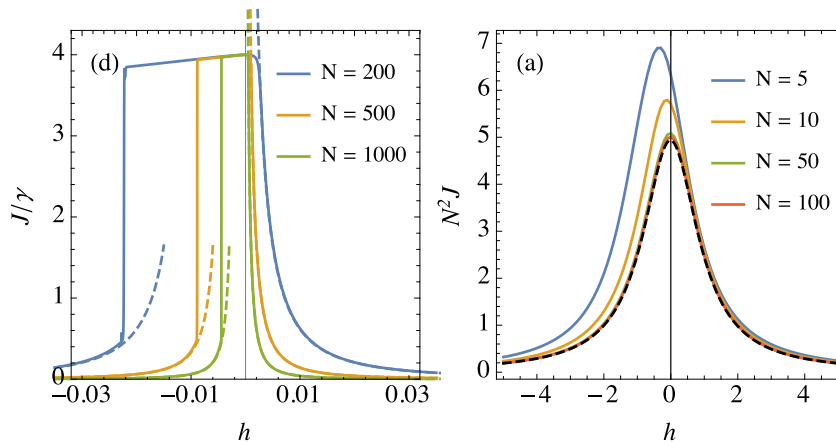


- Ou o campo em uma direção oposta ao polarizador.



- Observamos que o sistema apresenta uma transição descontínua dependendo do valor do campo.

- Mas só quando γ é pequeno



- ◆ Explicação: h funciona como um aprisionador de magnons, aumentando portanto as interações magnon-magnon.
 - ◆ *Plateau* representa o fluxo balístico onde os magnons não interagem.
 - ◆ Parte inferior representa o fluxo sub-difusivo, marcado por fortes interações magnon-magnon.
- ◆ O sistema funciona portanto como uma porta lógica para magnons.
 - ◆ Operando o dispositivo com h próximo da transição permite chavear entre dois estados com correntes muito distintas.
 - ◆ É assim que funcionam as portas lógicas e transistors.

Produção de entropia

Como caracterizar um sistema fora do equilíbrio?

- ◆ Mudando de assunto...
- ◆ Como caracterizar um sistema fora do equilíbrio?
- ◆ A chave está na **entropia**.
- ◆ Quando um sistema sofre um processo *reversível* a mudança na entropia do sistema é

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} := \phi \quad (\text{Processos reversíveis})$$

- ◆ Quando o processo é feito de forma irreversível a entropia será maior que este valor:

$$\Delta S \geq \phi \quad (\text{Processos irreversíveis})$$

- ◆ Ou seja, entropia foi *produzida* devido à *irreversibilidade*.
- ◆ O excesso é chamado de **produção de entropia**:

$$\pi = \Delta S - \phi \geq 0 \quad (\text{Produção de entropia})$$
- ◆ Essa fórmula foi escrita no livro original do Clausius (que foi quem introduziu o conceito de entropia) em 1867.
- ◆ Ou seja, a variação total da entropia tem duas contribuições:
 - ◆ O fluxo de entropia do ambiente para o sistema.
 - ◆ A entropia produzida no sistema.

$$\Delta S = \pi + \phi$$

Produção de entropia no NESS

- ◆ Considere um sistema que é mantido constantemente fora do equilíbrio.
- ◆ Então haverá uma produção constante de entropia.
- ◆ Podemos escrever

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\pi}{\Delta t} + \frac{\phi}{\Delta t}$$

- ◆ No limite $\Delta t \rightarrow 0$ definimos então

$$\frac{dS}{dt} = \Pi + \Phi$$

Π = taxa de produção de entropia ("entropia produzida por segundo").

- ◆ No NESS a entropia total não vai mudar no tempo:

$$\frac{dS}{dt} = 0 \implies \Pi = -\Phi \geq 0$$

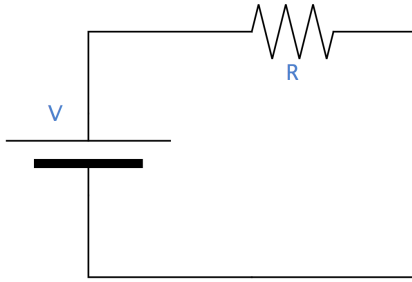
- ◆ Ou seja: toda a entropia produzida é despejada no ambiente.
- ◆ Note que isso não é equilíbrio! Isso é o NESS.

$$\text{Equilíbrio} \iff \Pi = 0$$

- ◆ Exemplo: no caso do fluxo de calor entre dois banhos

$$\Pi = J \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

Exemplo: resistor e bateria

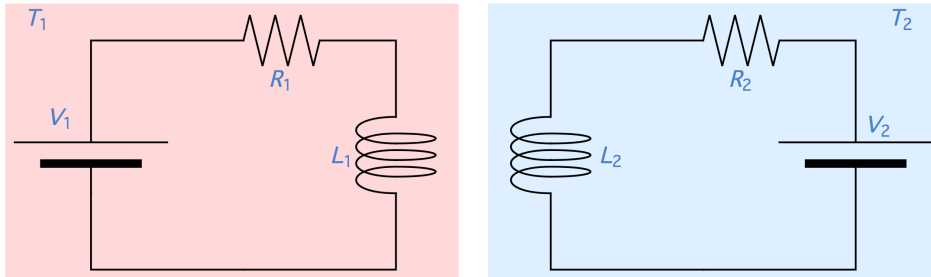


- ◆ Esse simples sistema configura um NESS:
 - ◆ A bateria está constantemente passando corrente pelo circuito.
 - ◆ E o resistor está constantemente dissipando calor para o ambiente.
- ◆ Neste caso a taxa de produção de entropia no NESS será

$$\Pi = \frac{V^2}{RT} = \frac{P}{T} = \frac{\text{Potência}}{\text{Temperatura}}$$

Exemplo: dois circuitos RL acoplados

- ◆ O campo magnético gerado no indutor 1 afeta o indutor 2 pela indutância mútua.



- ◆ Portanto, há um fluxo de entropia de um circuito para o outro.
- ◆ A taxa de produção de entropia neste caso é

$$\Pi = \frac{V_1^2}{R_1 T_1} + \frac{V_2^2}{R_2 T_2} + \left(\frac{m^2 R_1 R_2}{(L_1 L_2 - m^2)(L_2 R_1 + L_1 R_2)} \right) \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}$$

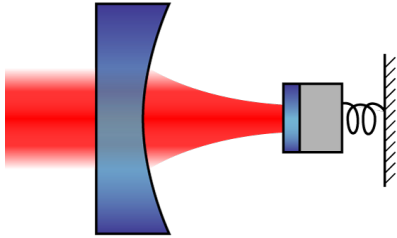
$m = \text{indutância mútua}$

- ◆ Vemos que há 3 contribuições:
 - ◆ Um termo para cada bateria.
 - ◆ E um termo devido ao fluxo de calor de um circuito para o outro
 - ◇ Note como esse termo depende de $(T_1 - T_2)^2$

G. T. Landi, T. Tomé e M. J. de Oliveira, *J. Phys. A.: Math. Theor.* **46** (2013) 395001

Exemplo: oscilador opto-mecânico

- ◆ Uma cavidade optomecânica (interferômetro de Fabry-Perot) consiste em um espelho fixo e outro ligado a um oscilador.
- ◆ O sistema é irradiado com um laser, que portanto interage com o oscilador.
- ◆ **Objetivo:** estudar a relação entre a radiação e o meio mecânico.



- ◆ A produção de entropia no NESS desse sistema se deve à presença do laser, que constantemente fornece energia.
- ◆ Existem dois canais de dissipação de energia:
 - ◆ O próprio canal ótico por onde o laser incide.
 - ◆ O banho térmico do oscilador, que dissipa energia por atrito.
- ◆ A taxa de produção de entropia no NESS lê-se (não se preocupe com o significado dos parâmetros):

$$\Pi = \frac{4 \mathcal{E}^2}{\kappa} + \frac{\gamma G^2 \mathcal{E}^2}{\omega^2 [2 n(T) + 1] (\Delta^2 + \kappa^2)}$$

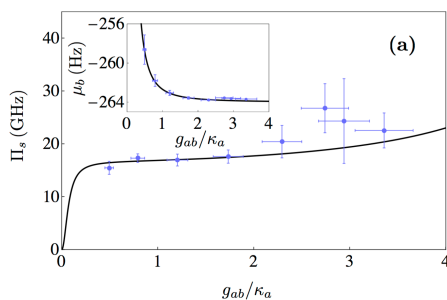
Azul = dissipação do laser (intensidade $\mathcal{E}$) no próprio canal ótico.

Vermelho = dissipação do laser no banho térmico do oscilador.

- ◆ No entanto, há uma terceira contribuição à produção de entropia, que advém das *flutuações quânticas*.

$$\Sigma_{\text{quant.}} = \frac{G^2 \kappa (\Delta^2 + \kappa^2)}{2 \Delta [\omega (\Delta^2 + \kappa^2) - \Delta G^2]}$$

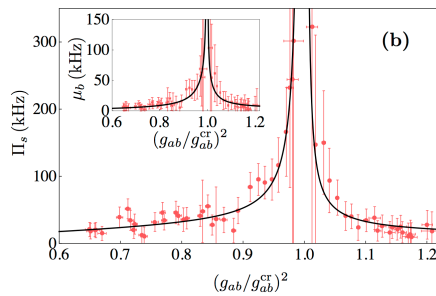
- ◆ Estas medidas experimentais foram realizadas pelo grupo do Prof. M. Aspelmayer da Universidade de Viena.
- ◆ O modelo teórico concorda muito bem com os dados experimentais.



M. Brunelli, *et. al.* Submetido ao Nature Communications (2016).

Condensado de Bose-Einstein em uma cavidade ótica

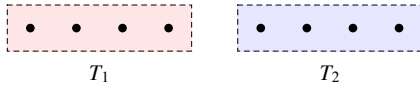
- ◆ Fizemos também um cálculo análogo para um condensado de Bose-Einstein aprisionado em uma cavidade ótica.
- ◆ Realização experimental do modelo de Dicke.
- ◆ Este sistema apresenta uma transição de fase quântica em função do acoplamento entre o campo eletromagnético e os átomos de Rb aprisionados.
- ◆ Experimentos realizados pelo grupo do Prof. T. Esslinger do ETH Zürich.



- ◆ A produção de entropia reflete a transição de fase quântica, apresentando uma divergência no ponto crítico.

Teoremas de flutuação

- ◆ Considere agora o seguinte problema.
 - ◆ Inicialmente dois sistemas são preparados a diferentes temperaturas.
 - ◆ Em $t = 0$ acoplamos os dois sistemas e deixamos eles evoluírem em contato um com o outro.



- ◆ Podemos nos perguntar: *qual o calor que flui de um corpo para o outro após um tempo t ?*
- ◆ Este é o problema mais simples da termodinâmica.
 - ◆ Sabemos que o calor vai fluir do corpo mais quente para o corpo mais frio até que os dois entre em equilíbrio térmico.
- ◆ Mas isso só é verdade para sistemas macroscópicos, que é onde a termodinâmica é definida.
- ◆ Se o sistema for microscópico, podemos eventualmente observar situações onde o calor flui do corpo mais frio para o mais quente.
 - ◆ Ocorre devido ao movimento Browniano.
- ◆ Ou seja, podem ocorrer ***violações locais da segunda lei.***

Teorema de flutuação de Jarzynski-Wójcik

- ◆ Quando o calor flui entre dois sistemas microscópicos, o calor Q se torna uma variável aleatória.

- ◆ Podemos falar então na probabilidade $P_t(Q)$

$P_t(Q)$ = Prob. de que um calor Q flua entre os dois sistemas no tempo t .

- ◆ Em 2004 Jarzynski e Wójcik descobriram que esta grandeza satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{P_t(Q)}{P_t(-Q)} = e^{\Delta\beta Q} \quad \Delta\beta = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

- ◆ Ou seja,

“É exponencialmente mais provável que o calor vá fluir na direção certa”.

- ◆ Note que $\Delta\beta Q$ representa exatamente a produção de entropia π .
- ◆ Portanto, podemos dizer que $P_t(-Q)$ é a probabilidade de observar uma produção de entropia negativa.

Fluxo de calor entre duas cadeias de spin

- ◆ Recentemente estudamos o fluxo de calor entre duas cadeias de spin.
- ◆ (vídeos)

Conclusões

- ◆ *Sistemas quânticos abertos.*
 - ◆ Apesar de não ser trivial, existem maneiras de descrever o atrito na mecânica quântica.
 - ◆ A minha favorita é o formalismo de Lindblad.
- ◆ *Sistemas fora do equilíbrio.*
 - ◆ Descrevem diversos problemas experimentais.
 - ◆ Caracterizados pela existência de uma corrente no NESS.
- ◆ *Produção de entropia.*
 - ◆ Melhor maneira de caracterizar os estados fora do equilíbrio.
 - ◆ Possuem uma contribuição intrinsecamente quântica.

Funções auxiliares

```
(*Show[Import["", "Image", ImageSize→600]]*)

SetDirectory[NotebookDirectory[]];
<< "LinLib`;
<< "CustomTicks`;
load[filename_, size_] := Show[Import[filename], ImageSize → Scaled[size]];

SetOptions[Plot, Frame → True, Axes → False,
  BaseStyle → 20, ImageSize → 400, PlotStyle → {Black}];

SetOptions[InputNotebook[],
  DefaultNewCellStyle → "Item",
  ShowCellLabel → "False",
  CellGrouping → Manual,
  FontFamily → "Times",
  DefaultNewCellStyle → {"Text", FontFamily → "Times"},
  BaseStyle → {FontFamily → "Times"},
  MultiLetterItalics → False,
  SingleLetterItalics → Automatic
]

Clear[I];
I[La_, γ_, k_, t_: 1] := Module[{a = γ² + t² Sin[k]², b = 2 γ t Cos[k], qr},
  qr = Range[ $\frac{\pi}{La+1}$ ,  $\frac{\pi La}{La+1}$ ,  $\frac{\pi}{La+1}$ ];
  
$$\frac{\text{Sin}[k]^2}{La+1} \text{Sum}\left[\frac{\text{Sin}[q]^2}{\gamma^2 + t^2 (\text{Cos}[k] - \text{Cos}[q])^2}, \{q, qr\}\right]$$

]

Clear[I1];
I1[γ_, k_, t_: 1] := Module[{a = γ² + t² Sin[k]², b = 2 γ t Cos[k]},
  
$$\frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{\gamma \sqrt{2}} \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} - 1 \right) \text{Sin}[k]^2$$

]

Clear[J];
J[La_, {μa_, μc_}, {Ta_, Tc_}, γ_: 1] := Module[{mr, e, m},
  mr = Range[ $\frac{\pi}{La+1}$ ,  $\frac{\pi La}{La+1}$ ,  $\frac{\pi}{La+1}$ ];
  e[k_] := -2 Cos[k];
  m[μ_, T_, k_] := If[T == 0, HeavisideTheta[μ - e[k]],  $\frac{1}{\text{Exp}\left[\frac{(e[k]-\mu)}{T}\right] + 1}$ ];
  
$$\frac{4 \gamma (*g^2*)}{(La+1)^2} \text{Total@Flatten@Table}\left[(\text{Sin}[k]^2 \text{Sin}[q]^2 (m[\mu a, Ta, k] - m[\mu c, Tc, k])) / \right. \\ \left. (\gamma^2 + (\text{Cos}[k] - \text{Cos}[q])^2), \{k, mr\}, \{q, mr\}\right]$$

];
```

```

Clear[Jtl];
Jtl[{μa_, μc_}, {Ta_, Tc_}, γ_: 1] := Module[{mr, e, m, a, b, int},

  e[k_] := -2 Cos[k];

  m[μ_, T_, k_] := If[T == 0, HeavisideTheta[μ - e[k]],  $\frac{1}{\text{Exp}\left[\frac{(e[k]-\mu)}{T}\right] + 1}$ ];

  a = γ2 + Sin[k]2;
  b = 2 γ Cos[k];
  (*int = (-1 +  $\frac{1}{2\gamma}(\sqrt{a+i b} + \sqrt{a-i b})$ ) Sin[k]2;)
  int =  $\left(\frac{1}{\gamma \sqrt{2}} \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} - 1\right) \text{Sin}[k]^2$ ;

   $\frac{4 \gamma (*g^2*)}{\pi} \text{NIntegrate}[(m[\mu a, Ta, k] - m[\mu c, Tc, k]) (int), \{k, 0, \pi\}]$ 
];

Clear[F];
F[La_, μ_, T_, γ_: 1] := Module[{mr, e, m},

  mr = Range[ $\frac{\pi}{La+1}$ ,  $\frac{\pi La}{La+1}$ ,  $\frac{\pi}{La+1}$ ];

  e[k_] := -2 Cos[k];

  m[k_] := If[T == 0, HeavisideTheta[μ - e[k]],  $\frac{1}{\text{Exp}\left[\frac{(e[k]-\mu)}{T}\right] + 1}$ ];

   $\frac{4 \gamma (*g^2*)}{(La+1)^2} \text{Total@Flatten@Table}\left[\frac{\text{Sin}[k]^2 \text{Sin}[q]^2 (m[k])}{\gamma^2 + (\text{Cos}[k] - \text{Cos}[q])^2}, \{k, mr\}, \{q, mr\}\right]$ 
];

Clear[Ftl];
Ftl[μ_, T_, γ_: 1] := Module[{mr, e, m, a, b, int},

  e[k_] := -2 Cos[k];

  m[k_] := If[T == 0, HeavisideTheta[μ - e[k]],  $\frac{1}{\text{Exp}\left[\frac{(e[k]-\mu)}{T}\right] + 1}$ ];

  a = γ2 + Sin[k]2;
  b = 2 γ Cos[k];
  int =  $\left(\frac{1}{\gamma \sqrt{2}} \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} - 1\right) \text{Sin}[k]^2$ ;

   $\frac{4 \gamma (*g^2*)}{\pi} \text{NIntegrate}[(m[k]) (int), \{k, 0, \pi\}] // \text{Chop}$ 
];

```



```

LLrange = {1, 4, 10, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 160};
δμ = 0.001;
TT = 0.02;
Jtl =
  Chop@Quiet@Table[{μ, Jtl[{μ + δμ, μ}, {TT, TT}] / δμ}, {μ, linspace[-3, 3, 100]}];

Do[
  plμ[LL] = Show[
    Plot[Evaluate[{J[LL, {μ +  $\frac{\delta\mu}{2}$ , μ -  $\frac{\delta\mu}{2}$ }, {TT, TT}] / δμ}], {μ, -3, 3},
      PlotRange → {0, All},
      AspectRatio → 1,
      ImagePadding → {{80, 10}, {50, 10}},
      FrameLabel → {"μ/t", "∂F/∂μ"},
      BaseStyle → {FontFamily → "Times", 20},
      ImageSize → 300,
      PlotStyle → Black,
      ImagePadding → {{73, 10}, {50, 10}},
      Frame → True,
      PlotStyle → Directive[Black],
      Epilog → {Text["(a) L = " <> ToString@LL, Scaled[{0.8, 0.92}]]}
    ],
    ListLinePlot[Jtl, PlotStyle → Directive[Red, Dashed]]
  ]; , {LL, LLrange}

δT = 0.001;
TT = 0.02;

JtlT =
  Chop@Quiet@Table[{μ, Jtl[{μ, μ}, {TT + δT, TT}] / δT}, {μ, linspace[-3, 3, 100]}];

Do[
  plT[LL] = Show[
    Plot[Evaluate[{J[LL, {μ, μ}, {TT +  $\frac{\delta T}{2}$ , TT -  $\frac{\delta T}{2}$ }] / δT}], {μ, -3, 3},
      PlotRange → All,
      AspectRatio → 1,
      ImagePadding → {{80, 10}, {50, 10}},
      FrameLabel → {"μ/t", "∂F/∂T"},
      BaseStyle → {FontFamily → "Times", 20},
      ImageSize → 300,
      PlotStyle → Black,
      ImagePadding → {{73, 10}, {50, 10}},
      Frame → True,
      PlotStyle → Directive[Black],
      Epilog → {Text["(a) L = " <> ToString@LL, Scaled[{0.8, 0.92}]]}
    ],
    ListLinePlot[JtlT, PlotStyle → Directive[Red, Dashed]]
  ]; , {LL, LLrange}

```