Movimento de partículas em campos eletromagnéticos

Você vai aprender tudo sobre eletromagnetismo no curso de física 3. Nessa aula eu quero simplesmente usar alguns desses resultados para explorar o que acontece quando uma partícula carregada atravessa uma certa região do espaço contendo campos elétricos e magnéticos.

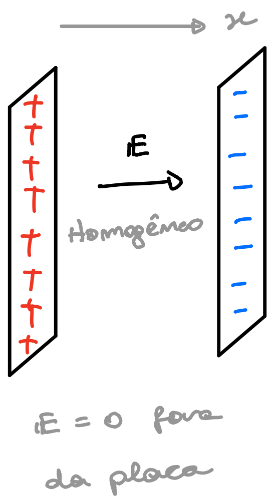
Campos elétricos uniformes

O campo elétrico $\mathbb{E}$ é um vetor. Uma partícula de carga q na presença de um campo $\mathbb{E}$ sofre uma força

$$\mathbb{F} = q\,\mathbb{E} \tag{1}$$

Ou seja, na mesma direção e sentido de $\mathbb{E}$. Em geral, o campo elétrico varia no espaço. Ou seja, temos um $\mathbb{E}(\mathbb{r})$. Isso é semelhante ao campo gravitacional.

Em algumas situações, no entanto, o campo elétrico será aproximadamente constante. A mais comum é o caso de duas placas paralelas

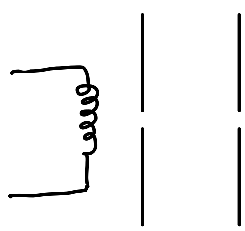


Temos duas placas, uma carregada positivamente e a outra negativamente. Fora da placa o campo é nulo e dentro dele é homogêneo

$$\mathbf{E} = E\hat{x} \qquad (2)$$

O vetor $\mathbf{E}$ sempre aponta das cargas positivas para as negativas.

Esse é o setup padrão que usamos em física para acelerar partículas. Vejamos o caso de elétrons por concreteza. Podemos obter elétrons aquecendo um filamento.



Os elétrons saem do filamento com velocidade próxima de zero. Para acelerá-los, passamos os elétrons por um conjunto de placas paralelas que possui um campo elétrico $\mathbf{E} = E x$.

Fazemos dois pequenos furos nas placas para deixar o elétron passar. Isso não interfere quase nada no campo $\mathbf{E}$, contanto que os furos sejam pequenos.

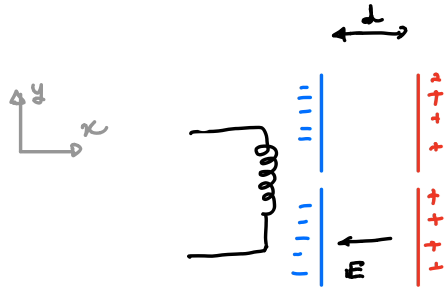
A 2ª lei para o elétron será, portanto

$$ma = \mathbf{F} = q\mathbf{E} = qE\hat{i} \qquad (3)$$

A aceleração é constante. Ou seja, o movimento será uniformemente acelerado com a componente x da aceleração sendo

$$a = \frac{qE}{m} \tag{4}$$

Note como a aceleração depende do sinal de q e do sinal de E. Vamos focar no caso de elétrons, onde $q<0$. Nesse caso se queremos acelerá-lo para a direita $(a>0)$ precisaremos portanto de $E<0$. Devemos, portanto, ter algo como



Com $q<0$ e $E<0$, a aceleração será positiva.

Supondo que o elétron parta do repouso, teremos então

$$x(t) = \frac{at^2}{2} \qquad v(t) = at \tag{5}$$

Essa aceleração só continua enquanto o elétron estiver dentro das placas. Seja d a distância entre elas. Da fórmula de Torricelli, teremos portanto

$$v^2 = 2ad = 2\frac{qE}{m}d \tag{6}$$

Definimos

$$V = Ed = \text{diferença de potencial} = \text{ddp} \tag{7}$$

A velocidade final será, portanto

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m} V} \qquad (8)$$

Dizemos que "aceleramos a partícula por uma diferença de potencial V".

carga elétrica é medida em coulomb

$$[q] = C = \text{coulomb} \qquad (9)$$

A carga do elétron, por exemplo, vale

$$q = -e = -1,602 \times 10^{-19} \ C \qquad (10)$$

Como $F = qE$, a unidade de campo elétrico será,

$$[E] = N/C \qquad (11)$$

Portanto, a unidade da ddp V em (7) será

$$[V] = [E]/[d] = \frac{N}{Cm} \qquad (12)$$

Essa unidade, no entanto, é tão importante que recebe o nome especial de volt

$$1 \ V = 1 \ \text{Volt} = 1 \ \frac{N}{Cm} \qquad (13)$$

ddp é, portanto, medida em V e campo elétrico em V/m (já que $E = V/d$).

Eu sei que não falamos de energia ainda, mas podemos ver da Eq. (8) que

$$\frac{1}{2} m v^2 = q V \qquad (14)$$

Essa expressão é super importante: o lado esquerdo é a energia cinética que o elétron ganha quando passa pela placa. Vemos, portanto, que essa energia é simplesmente qV.

Note que como estamos sempre no SI, vemos que Joule e volt estão relacionados por

$$J = C \cdot V \qquad (15)$$

Qual a energia que um elétron ganha quando ele é acelerado de 1 V (nesse caso, −1 V já que devemos ter $E<0$)? Usando (10):

$$\frac{1}{2} m v^2 = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} \qquad (16)$$

Essa é a unidade que chamamos de elétron-Volt

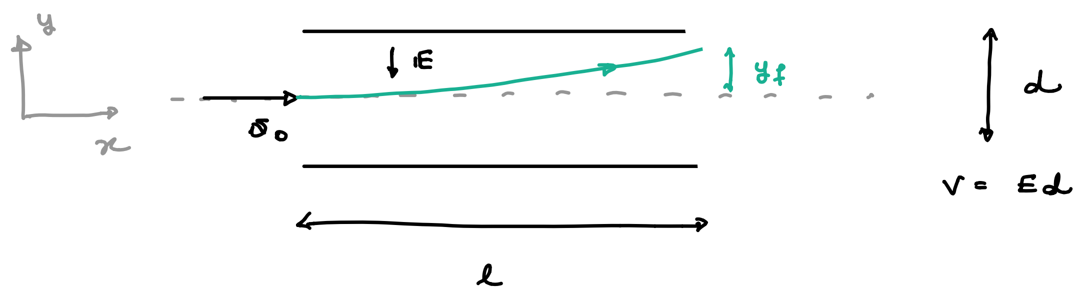
1 eV = energia cinética que um elétron ganha quando acelerado de 1 V

É legal notar como isso vale para prótons também: a energia cinética ainda será qV. Claro, a velocidade será menor pois a massa é maior. Mas a energia será a mesma.

O elétron-volt é muito útil. Nos aceleradores de partícula, por exemplo, usamos isso como a medida básica de quão aceleradas foram as partículas. Por exemplo, dizemos "o acelerador tal chega a 2 TeV". Isso significa uma energia de 2×10^9 eV.

Tubo de raios catódicos

Considere agora o que acontece quando um elétron passa por uma região contendo um campo elétrico perpendicular.



Ou seja, supomos que $\vec{v}_0 = v_0 \hat{i}$ e $\mathbb{E} = E\hat{j}$. Nesse caso a 2ª lei fornece

$$m a = q\,\mathbb{E} = qE\hat{j} \tag{17}$$

Ou seja, o movimento será uniforme em x e acelerado em y:

$$x(t) = v_{0x}\, t \tag{18}$$

$$y(t) = \frac{qE}{m}\frac{t^2}{2} \tag{19}$$

Isso tudo só vale enquanto o elétron estiver entre as placas. Ou seja, enquanto $x(t) < \ell$. No ponto $x = \ell$, teremos $t = \ell/v_0$ e portanto

$$y_f = \frac{qE}{m}\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{v_0}\right)^2$$

onde y_f significa o y no final da placa.

Vamos escrever isso em termos da diferença de potencial $V = Ed$:

$$y_f = \frac{1}{2} \frac{qV}{m} \frac{\ell^2}{d v_0^2} \tag{20}$$

Note como y_f diminui com v_0 (o e^- passa menos tempo entre as placas).

Podemos calcular também a velocidade no instante em que o e^- sai da placa. Em x continuaremos a ter v_{0x} já que o movimento é uniforme. Em y, por outro lado, teremos de (19)

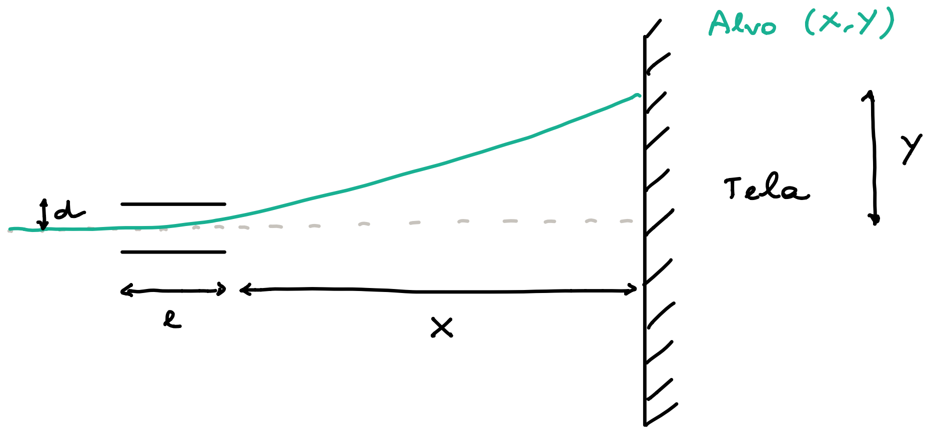
$$v_y(t) = \frac{qE}{m} t \tag{21}$$

Substituindo $t = \ell / v_0$:

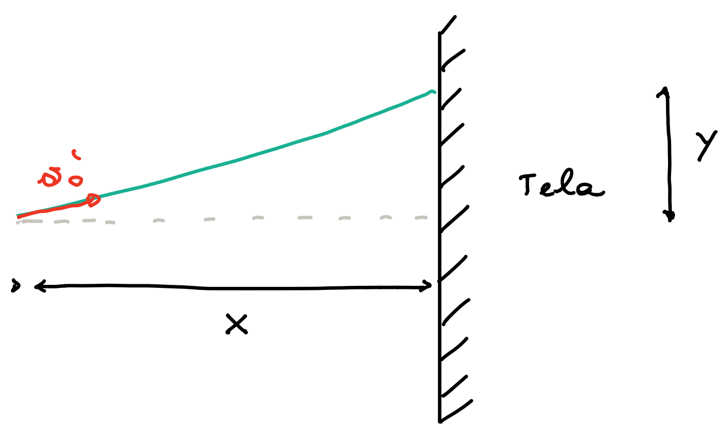
$$v_{yf} = \frac{qV}{md} \frac{\ell}{v_0} \tag{22}$$

Após sair da placa, o elétron não estará sob a ação de nenhuma força (podemos desprezar a gravidade). O e^- irá, portanto, se mover em movimento retilínio e uniforme, com velocidade "inicial" dada $v_0 \hat{i} + v_{yf} \hat{j}$.

Nós podemos usar isso para mirar o elétron onde quisermos. Essa é a ideia de um tubo de raio catódicos.



Podemos supor, como quase sempre é verdade, que (X,Y) são muito maiores que ℓ e d. Consequentemente teremos algo como



Ou seja, o elétron parte da origem com velocidade $\vec{v}_0'$ dada por

$$\vec{v}_0' = v_0 \hat{i} + \frac{qV}{m} \frac{\ell}{d v_0} \hat{j} \tag{23}$$

como agora o movimento é retilíneo e uniforme em ambas as direções, teremos

$$x(t) = v_0 \, t \qquad (24)$$
$$y(t) = \frac{qV}{m} \frac{\ell}{d v_0} \, t$$

O elétron vai andar a distância X num tempo $t = X / v_0$. A posição Y será, portanto

$$Y = \frac{qV}{m} \frac{\ell}{d v_0^2} X \qquad (25)$$

O importante é notar aqui como Y depende de V. Todas as outras grandezas são fixas. Ajustando a voltagem entre as placas, podemos ajustar portanto em qual posição Y o elétron vai bater. Usando um segundo conjunto de placas, podemos fazer o mesmo na direção z.

A Eq. (25) fornece também uma forma de medir a razão e/m_e entre a carga do elétron ($q = -e$) e a sua massa m_e. Esse experimento foi feito por J. J. Thomson em 1897:

$$\frac{e}{m_e} = \frac{d v_0^2}{\ell} \frac{Y}{X} \qquad (26)$$

O que é mais difícil de medir, na verdade, é a velocidade inicial v_0. Veremos como fazer isso logo mais. Esse experimento só permite saber e/m. O valor de e só foi medido por Millikan em 1910. Sabendo e, conseguimos então determinar m_e.

Movimento em campos magnéticos uniformes.

O movimento em um campo magnético é bem diferente. A força que um campo $\mathbb{B}$ exerce em uma partícula de carga q depende da sua velocidade v, com módulo dado por

$$|\mathbb{F}| = q v B \qquad (26)$$

onde $B = |\mathbb{B}|$ é o módulo do campo magnético. A unidade de B é, portanto

$$[B] = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = T \qquad (27)$$

chamada de Tesla.

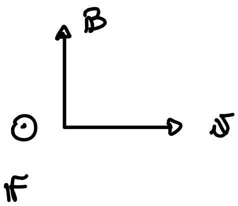
A direção, no entanto, é meio bizarra: ela é perpendicular tanto a $\mathbb{B}$ quanto a v. Introduzimos a seguinte notação.

$\odot$: vetor saindo do papel

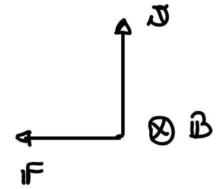
$\otimes$: vetor entrando no papel

Isso é mais ou menos o que você veria se visse uma flecha se aproximando ou se afastando de você.

A direção da força magnética será, supondo $q > 0$,



ou

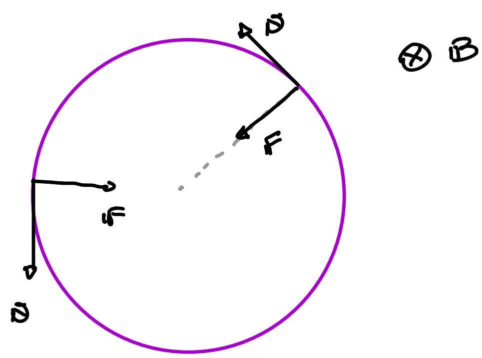


Essa é a chamada regra da mão direita [preguiça de explicar. Dá um google! ;)] Se $q < 0$ a direção de $\mathbf{F}$ se inverte.

Para quem já viu o conceito de produto vetorial, a expressão completa de $\mathbf{F}$ é

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{28}$$

Como a força magnética é sempre perpendicular à velocidade, ela será sempre normal ao movimento.



Vemos, portanto, que a força magnética atua como uma força centrípeta. A aceleração resultante, portanto, será sempre centrípeta

$$a = \frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{r}$$

O raio da órbita será, portanto

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{29}$$

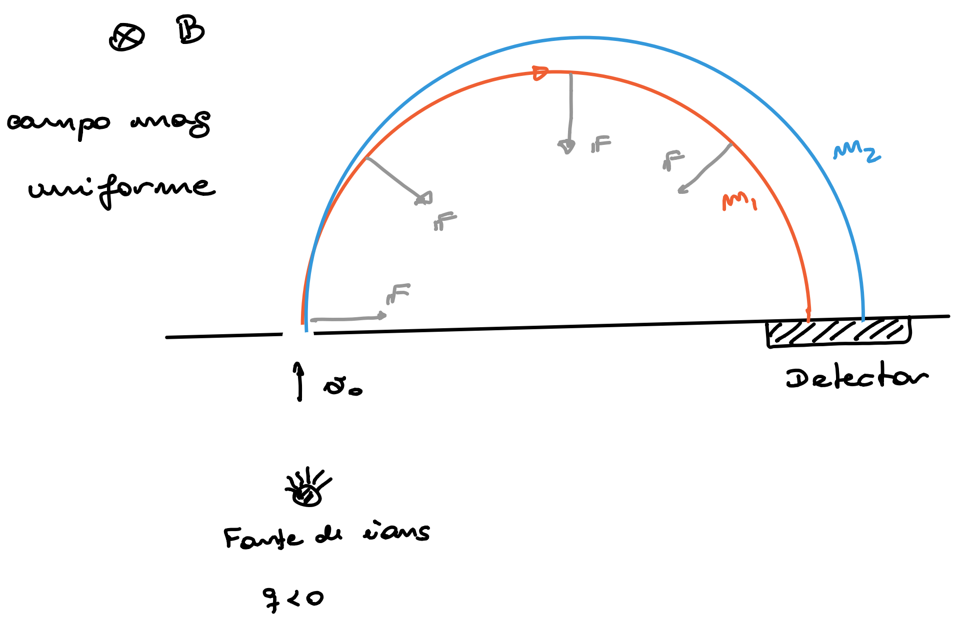
e a frequência angular será

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \tag{30}$$

que é conhecida como frequência de ciclotron.

Espectrômetro de massa

As ideias acima formam a base de um equipamento extremamente importante em física, química e outras ciências. Considere a seguinte situação



Usamos uma fonte que produz íons com velocidade v_0 e carga $q<0$. Esses íons são então injetados em uma região do espaço onde há um campo magnético B entrando no papel. Como $q<0$ isso produz uma força magnética para dentro da circunferência, que fará com que o íon execute movimento circular uniforme.

No entanto, o raio da trajetória depende da massa.

$$r = \frac{m v_0}{q B} \tag{31}$$

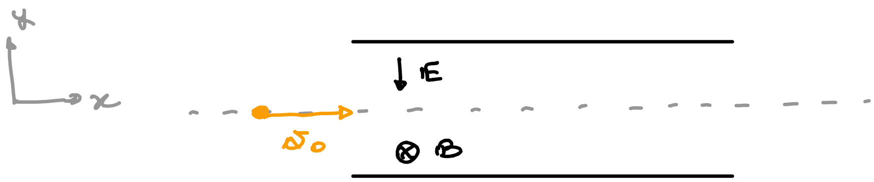
Portanto, partículas de diferentes massas vão executar trajetórias diferentes. E, consequentemente, vão atingir o detector em espaços diferentes.

Com isso podemos, portanto, separar elementos de diferentes massas. Dado uma amostra de um certo elemento, por exemplo C, conseguimos com isso saber a proporção de cada isótopo na amostra. Maneiro né?!

Ou dado uma amostra com várias moléculas, podemos saber as massas de cada uma delas.

Movimento na presença de campos elétricos e magnéticos

Vamos agora misturar tudo. Considere a seguinte situação



Um elétron com velocidade horizontal entra em uma região com campos $\mathbb{E}$ e $\mathbb{B}$ uniformes. A força resultante será

$$\mathbb{F} = q\mathbb{E} + q\vec{v}\times\mathbb{B} \tag{32}$$

que é conhecida como força de Lorentz. Como $q<0$ e $\mathbb{E}$ é para baixo, a força $q\mathbb{E}$ será na direção $+\hat{j}$. Já a força magnética, como $\mathbb{B}$ é para dentro e v para a direita, $v\times\mathbb{B}$ será para cima, mas como $q<0$, $q(v\times\mathbb{B})$ será para baixo (direção $-\hat{j}$). Teremos, portanto

$$\mathbb{F} = (qE - qvB)\,\hat{j} \tag{33}$$

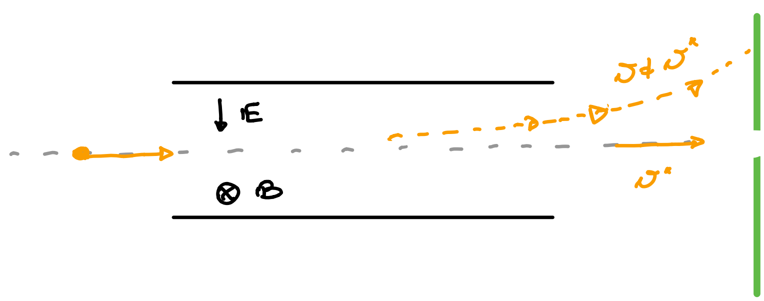
Vemos que a força elétrica e a força magnética podem conspirar para dar uma resultante nula. Ou seja, teremos $\mathbb{F}=0$ quando

$$qE = qvB \tag{34}$$

Isso significa que partículas que entram com velocidade

$$v^* = \frac{E}{B} = \frac{V}{dB} \tag{35}$$

não são defletidas. Isso pode ser usado como um seletor de velocidades. Basta colocarmos uma fenda após as placas



Isso é muito utilizado pois feixes de elétrons ou íons em geral tem uma distribuição muito larga de velocidades. Usando um filtro como esse, podemos selecionar apenas aquelas velocidades que queremos, ajustando a ddp V.

É isso que Thomson usou para saber v_0 em seu experimento [Eq. (26)].