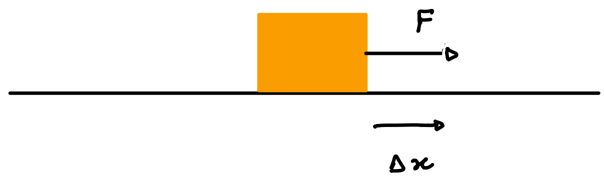
Trabalho e energia cinética

Considere um bloco sobre um plano sem atrito e sendo empurrado por uma força F



A força faz o bloco andar. Dizemos, portanto, que ela realiza trabalho sobre o bloco. Se o bloco anda uma distância Δx, definimos o trabalho realizado para mover o bloco de Δx como

$$W = F\,\Delta x \tag{1}$$

O trabalho, como você pode verificar, tem dimensões de energia

$$[W] = J = N \cdot m \tag{2}$$

Temos agora duas tarefas a realizar.

1) Entender porque o conceito de trabalho é útil.

2) Ver como a Eq. (1) se generaliza em casos mais complicados.

Teorema trabalho - energia cinética

Vejamos porque o conceito de trabalho é útil. Considere a situação da figura. Desprezamos o atrito. A força F vai produzir uma aceleração constante $a = F/m$. Como o mov. é unif. acelerado, vale a fórmula de Torricelli

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x \tag{3}$$

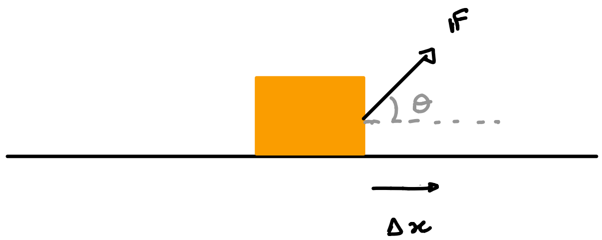
$$= v_i^2 + \frac{2F\Delta x}{m}$$

Vemos surgir aí o trabalho $W = F\Delta x$. Rearranjando, obtemos

$$W = F\Delta x = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{4}$$

A grandeza $\frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética da partícula. Esse resultado diz, portanto, que ao realizarmos trabalho sobre um bloco, aumentamos sua energia cinética. É por isso que esse conceito é útil.

Considere agora a seguinte situação:



Continuamos assumindo que não há atrito. A 2ª lei nesse caso será dada por

$$m\mathbf{a} = \mathbb{F} + \mathbb{F}_p + \mathbb{N} \qquad (5)$$

$$= F\cos\theta\ \hat{i} + \left[F\sin\theta + N - mg\right]\hat{j}$$

A componente vertical da força externa, $F\sin\theta$, não vai contribuir para o movimento pois vai se cancelar com a normal. O movimento horizontal terá, portanto, uma aceleração

$$a = \frac{F}{m}\cos\theta \qquad (6)$$

Ao invés de (3) teremos

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2F\Delta x\cos\theta}{m}$$

ou

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = F\Delta x\cos\theta \qquad (7)$$

A diferença de energia cinética está relacionada, nesse caso, com $F \Delta x \cos\theta$ e não $F \Delta x$. Ou seja, faz sentido definirmos o trabalho nesse caso como

$$W = F \Delta x \cos\theta \tag{8}$$

A lógica aqui é que, comparado com o exemplo anterior, esse processo claramente parece menos eficiente. Aplicamos a mesma força F e estamos interessados no mesmo deslocamento Δx. Mas agora, apenas uma parte da força está de fato contribuindo para o movimento. O trabalho que realizamos, portanto, deve ser menor que $F \Delta x$.

O produto escalar

Podemos formalizar essa ideia através do conceito de produto escalar. Dados dois vetores quaisquer

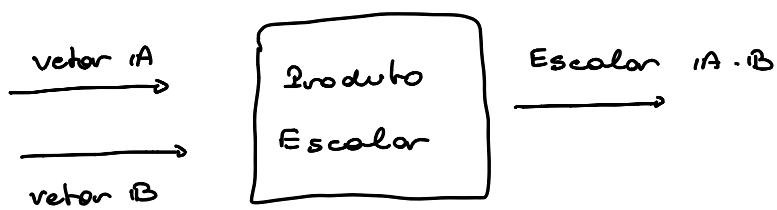
$$\mathbb{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$
$$\mathbb{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \tag{9}$$

Definimos o produto escalar entre eles como sendo

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{10}$$

Ou seja, multiplicamos componente a componente e depois somamos.

O produto escalar transforma dois vetores em um número:



Eu vou deixar como exercício para você verificar que

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$$
$$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \cdot \mathbb{C} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{C} + \mathbb{B} \cdot \mathbb{C} \tag{11}$$

Ambas seguem diretamente da Eq (10).

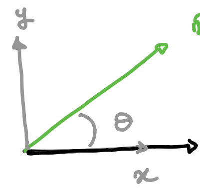
Fazendo $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ em (10), obtemos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2 = A^2 \qquad (12)$$

Ou seja, o produto escalar de $\mathbf{A}$ com ele mesmo é o módulo do vetor.

Foquemos agora no caso 2D e considere os seguintes vetores

$$\mathbf{B} = B\cos\theta\,\hat{i} + B\sin\theta\,\hat{j}$$



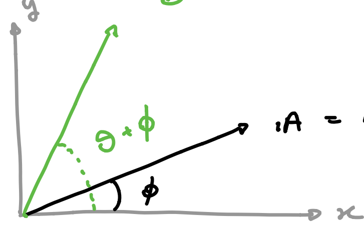
$$\mathbf{A} = A\,\hat{i}$$

O produto escalar entre eles será

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad (13)$$

Suponha agora que rodamos os dois vetores por um mesmo ângulo ϕ. Nesse caso obtemos

$$\mathbf{B} = B\cos(\theta + \phi)\,\hat{i} + B\sin(\theta + \phi)\,\hat{j}$$



$$\mathbf{A} = A\cos\phi\,\hat{i} + A\sin\phi\,\hat{j}$$

o produto escalar entre eles será

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = AB\cos\phi\cos(\theta+\phi) + AB\sin\phi\sin(\theta+\phi) \tag{14}$$

usando

$$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) \tag{15}$$

vemos que

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = AB\cos(\theta+\phi-\phi) = AB\cos\theta. \tag{16}$$

Ou seja, exatamente igual ao que obtivemos antes de rodá-los. Esse resultado é muito importante pois ele mostra que o produto escalar não depende da orientação absoluta de $\mathbb{A}$ e de $\mathbb{B}$, mas apenas da orientação relativa entre os dois. Ou seja, sempre podemos escrever

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = AB\cos\theta \tag{17}$$

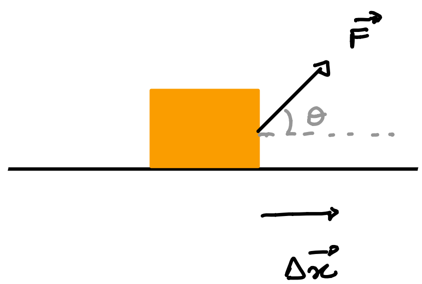
onde $A = |\mathbb{A}|$, $B = |\mathbb{B}|$ e θ = ângulo entre $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$.

Em particular, vemos que

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = AB$ quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são paralelos

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = 0$ quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são perpendiculares

Voltando agora para a definição de trabalho, vemos que a Eq. (8) pode naturalmente ser escrita como



$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} \qquad (18)$$
$$= F \Delta x \cos\theta$$

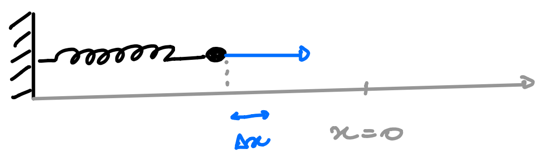
(Resolvi escrever $\vec{F}$ ao invés de F para variar um pouco).

Essa generalização é bacana pois permite expressarmos o trabalho de forma mais geral, como um produto escalar entre força e deslocamento. Note como W é sempre um escalar, apesar de $\vec{F}$ e $\Delta\vec{x}$ serem vetores

Trabalho de forças que não são constantes

A Eq. (18) só vale quando a força não varia com a posição. Considere, por exemplo, o trabalho exercido por uma mola ao descomprimir uma partícula

$F(x) = -kx$ depende da posição



A força que a mola exerce é dada pela lei de Hooke e vale $F = -kx$. Se a mola está comprimida $x < 0$ e portanto $F > 0$. Ou seja, a força empurra a partícula para a direita; a mola vai, portanto, realizar trabalho sobre a partícula.

Suponha que $x = -1\,m$ e estamos interessados no trabalho realizado ao mover a mola por $\Delta x = 10\,cm$. Ou seja, de

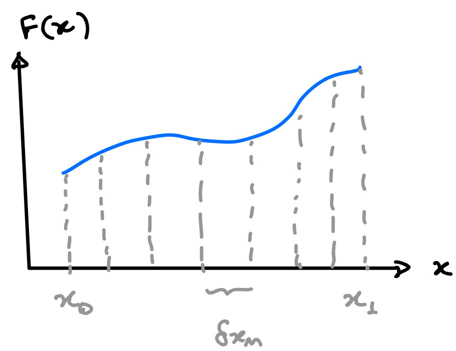
$$x_i = x = -1\,m \quad \text{até} \quad x_f = x + \Delta x = -90\,cm.$$

Se tentamos usar a Eq. (18) teríamos $W = F(x)\Delta x$. Mas qual $F(x)$ deve entrar aí? $F(x_i)$, $F(x_f)$ ou algum outro? Claramente tem algo inconsistente aí.

O segredo para resolver esse problema é quebrar o intervalo $\Delta x = x_f - x_i$ em vários pedacinhos e considerar o trabalho em cada um deles.

Por exemplo, se queremos o trabalho realizado entre $x_i = -1\,m$ e $x_f = -0.999\,m$, podemos com ótima aproximação usar $F(-1)$; o erro que estaremos cometendo será muito pequeno.

Decompomos, portanto, o intervalo $x_1 - x_0$ em pedacinhos bem pequenos de tamanho δx_i



Eu uso delta minúsculo δx_m, ao invés de Δx_m, só para enfatizar que esses intervalos são muito pequenos.

O trabalho entre x e $x + \delta x$ será pequeno também:

$$\delta W \simeq F(x)\,\delta x \tag{19}$$

Esse resultado é aproximado, mas a aproximação melhora conforme diminuimos δx.

Para obter o trabalho total em ir de x_0 até x_1, somamos o trabalho realizado em cada intervalinho

$$W_{x_0 \to x_1} = \sum_n F(x_n)\,\delta x_n \tag{20}$$

Estamos interessados no limite em que os δx_n se tornam infinitesimais. Cada termo em (20) se tornará cada vez menor. Mas o número de termos na soma também aumenta, então as coisas se compensam.

Olhando novamente para a figura acima, note como a Eq (20) corresponde à área sob a curva. Ou seja, decompomos a área como uma soma de retângulos de base δx_n e altura $F(x_n)$

Como você vai ver no curso de cálculo, no limite em que $\delta x_i \to 0$ isso se torna uma integral definida

$$\begin{aligned} W_{x_0 \to x_1} &= \lim_{\delta x_n \to 0} \sum_n F(x_n)\,\delta x_n \\ &= \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \end{aligned} \tag{21}$$

A integral definida é como as integrais que vimos antes, exceto que o resultado deve ser avaliado nos limites de integração x_i e x_f.

Funciona mais ou menos assim. Considere, por exemplo, o caso de uma força constante

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$$

Vimos anteriormente que

$$\int dx = x \quad \rightsquigarrow \quad \int F\,dx = F\,x$$

Agora, avaliamos o resultado nos limites de integração e subtraímos um do outro:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx = F\,x\,\Big|_{x_i}^{x_f} = F\,(x_f - x_i) \tag{22}$$

A notação $\Big|_{x_i}^{x_f}$ significa "avalie o resultado entre x_f e x_i".

Veja que obtemos exatamente a expressão (1) para o trabalho.

$W = F\,\Delta x$.

Quando a força não é constante, por outro lado, sabemos agora como proceder. No caso da lei de Hooke, $F(x) = -kx$, por exemplo, obtemos

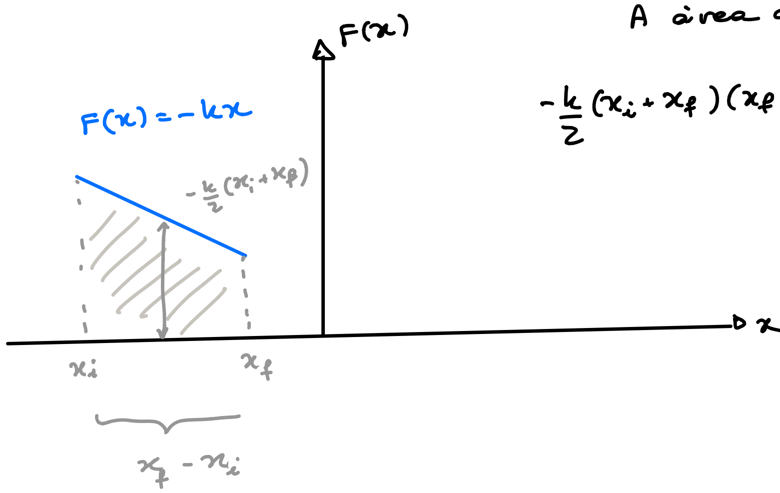
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x\,dx = -k \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_i}^{x_f}$$

$$= -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Portanto

$$W = -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right) \qquad (23)$$

É possível chegar a esse resultado também usando a interpretação de W como sendo a área sob a curva.



A área desse trapézio é

$$-\frac{k}{2}(x_i + x_f)(x_f - x_i) = -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Teorema trabalho - energia cinética para forças gerais.

Vejamos agora o que acontece com a Eq. (4) quando a força não é constante. Eu vou focar em 1D por enquanto. Logo mais generalizamos para 2 e 3D.

Da (21) vimos que

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

Por outro lado, da 2ª lei temos

$$F(x) = ma = m\frac{dv}{dt} \tag{24}$$

Portanto

$$W = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx \tag{25}$$

Agora eu uso uma malandragem (por favor não me odeie!): Eu vou "transferir" o dt:

$$\frac{dv}{dt}dx = dv\frac{dx}{dt} \tag{26}$$

Eu sei que parece roubalheira, mas não é. Eu prometo. No curso de cálculo vocês verão porque isso é permitido.

Usando isso na Eq (25) chegamos a

$$W = \int_{x_i}^{x_f} m\, dv \frac{dx}{dt}$$

Mas $\frac{dx}{dt} = v$ então podemos escrever

$$W = \int_{v_i}^{v_f} m v\, dv \qquad (27)$$

onde eu mudei os limites de integração de x_i, x_f para v_i, v_f, que são as velocidades que a partícula terá em x_i e em x_f. O que eu fiz aqui é o que chamamos de mudança de variáveis. Ao invés de integrar em x, eu mudei a variável de integração para v.

A integral em (27) nós agora sabemos calcular. Ela é idêntica à integral que nos levou a Eq (23):

$$W = \int_{v_i}^{v_f} m v\, dv = m \frac{v^2}{2} \Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2)$$

chegamos portanto novamente ao teorema trabalho-energia cinética:

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \qquad (28)$$

Esse resultado é impressionante: o teorema permanece válido mesmo quando a força não é constante.

Vamos agora analizar o caso do oscilador harmônico.

Temos

$$W = -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \qquad (29)$$

Suponha que começamos com a mola comprimida e vemos o trabalho que a mola realiza em descomprimi-la. Por exemplo $x_i = -1\,m$ e $x_f = -90\,cm$. Nesse caso

$$x_f^2 < x_i^2 \rightsquigarrow W > 0 \qquad (30)$$

Consequentemente, a energia cinética da partícula vai aumentar. Isso faz sentido: a mola empurra a partícula para a direita, que portanto acelera, aumentando sua velocidade.

Considere agora o caso contrário, $x_i = -90\,cm$ e $x_f = -1\,m$. Nesse caso

$$x_f^2 > x_i^2 \rightsquigarrow W < 0 \qquad (31)$$

Quando o trabalho é negativo, dizemos que a partícula realizou trabalho na mola (e não o contrário). Esse trabalho realizado pela partícula fez com que a mola se comprimisse.

Mas, em compensação, a partícula teve que perder energia cinética. Ou seja, $\frac{1}{2} m v_f^2 < \frac{1}{2} m v_i^2$.

Resumo: formulação geral do teorema trabalho-energia cinética

O teorema TEC é muito poderoso e muito útil. Vimos nessa aula duas formas de generalizá-lo. 1°, quando a força não é colinear com o deslocamento, o que nos motivou em introduzir o produto escalar. E segundo, no caso em que a força não é constante, o que nos motivou a reescrever W como uma integral.

Agora vamos juntar as duas coisas. Considere uma partícula se movendo em 3D e seja $\vec{r}(t)$ seu vetor posição. Suponha também que sob essa partícula atua uma força $\vec{F}(\vec{r})$ que pode, em geral, depender da posição $\vec{r}$. O trabalho realizado ao movermos a partícula de um ponto P_1 até um ponto P_2 no espaço será

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (32)$$

Esse resultado decompõe a trajetória em pequenos incrementos $d\vec{r}$ e leva em conta, também, o fato de $d\vec{r}$ não necessariamente ser colinear com $\vec{F}$. A Eq. (32) é bastante sofisticada. Não se preocupe se ela parece um pouco assustadora agora. Veremos como trabalhar com ela nas próximas aulas.