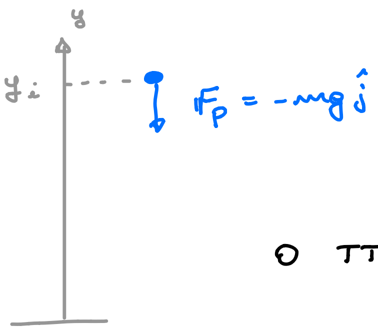
Conservação de energia, parte 1

Considere uma partícula caindo sobre a ação da gravidade



Suponha que ela cai, partindo de uma posição inicial y_i com velocidade inicial v_i

O TTEC que vimos na última aula diz que

$$W = \int_{y_i}^{y_f} F\,dy = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \qquad (1)$$

onde $F = -mg$. Como a força é constante, teremos

$$W = -mg \int_{y_i}^{y_f} dy = -mg\, y \Big|_{y_i}^{y_f} = -mg\,(y_f - y_i) \qquad (2)$$

A Eq. (1) se torna, portanto,

$$-mg\,y_f + mg\,y_i = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Vamos colocar tudo que é "i" de um lado e tudo que é "f" do outro:

$$\frac{1}{2} m v_i^2 + mg\,y_i = \frac{1}{2} m v_f^2 + mg\,y_f \qquad (3)$$

Essa equação é um exemplo de uma lei de conservação: o lado esquerdo só depende do instante "i" enquanto o lado direito só depende de "f". Mas esses instantes são arbitrários. Ou seja, a qualquer instante do movimento, a grandeza

$$E = \frac{1}{2} m v(t)^2 + mg\, y(t) \tag{4}$$

é uma constante (não depende do tempo). Tanto $v(t)$ quanto $y(t)$ dependem. Mas a combinação (4) não. Chamamos E da energia total da partícula. E dizemos que durante a queda livre, a energia se conserva. Isso não é verdade para todos os tipos de movimentos. Ela deixa de valer, por exemplo, na presença de forças de atrito. Veremos isso em mais detalhes adiante.

A Eq. (4) diz que E é constante. Mas o que determina o valor de E? Resposta: as condições iniciais. Suponha que inicialmente a partícula foi solta do repouso a uma altura h. Então, para esse instante, teremos

$$E = mgh \tag{5}$$

Com o passar do tempo, a altura vai diminuir. E, ao mesmo tempo, a velocidade v vai aumentar. Essas duas coisas vão ocorrer de tal forma que

$$\frac{1}{2} m v(t)^2 + mg\, y(t) = mgh = \text{constante} \tag{6}$$

Ou seja, a diminuição da altura se transfere em um aumento da velocidade.

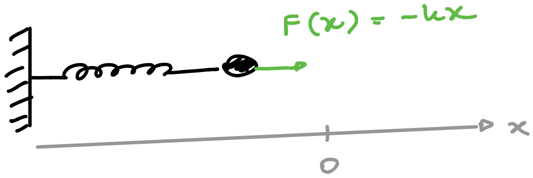
Note como a conservação de energia nada mais é do que a fórmula de Torricelli: de (3), por exemplo, temos

$$v_f^2 = v_i^2 - 2g\,(y_f - y_i) \tag{7}$$

Torricelli, portanto, pode ser vista como uma manifestação da conservação de energia.

Exemplo: oscilador harmônico

Considere agora o sistema massa mola



O trabalho realizado, como vimos da última vez, será

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = -\frac{kx^2}{2}\Bigg|_{x_i}^{x_f}$$

$$= -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right) \qquad (8)$$

Portanto, do tTEC teremos

$$-\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Rearranjando,

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{k}{2}x_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 \qquad (9)$$

Vemos aqui outro exemplo de conservação de energia. Só que nesse caso a energia será dada por

$$E = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 \qquad (10)$$

Esse resultado ilustra bem porque conservação de energia é um conceito útil: podemos usar a Eq. (9) para tirar uma série de conclusões sobre o movimento harmônico sem termos que de fato resolver a 2ª lei.

Por exemplo, vemos que ao longo da oscilação, a velocidade será máxima quando $x=0$. Ou seja, no instante em que a massa está no ponto de equilíbrio. Nesse caso a velocidade máxima será

$$v_{max} = \sqrt{2E/m} \tag{11}$$

onde a energia E depende apenas das condições iniciais.

Da mesma forma, podemos ver qual será a amplitude máxima de oscilação: x estará em seu máximo quando $v=0$, pois é nesse ponto que a direção do movimento se inverte.

Portanto

$$x_{max} = \sqrt{2E/k} \tag{12}$$

o que, novamente, só depende da energia inicial.

Forças conservativas e energia potencial

Nos dois exemplos anteriores, Eqs (4) e (10), a energia total é composta da energia cinética mais um outro termo. Esse termo adicional é chamado de energia potencial

$$U(y) = mgy \qquad \text{força peso} \tag{13}$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{massa - mola} \tag{14}$$

A energia total fica portanto escrita como

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U \tag{15}$$

$$= \text{cinética} + \text{potencial}$$

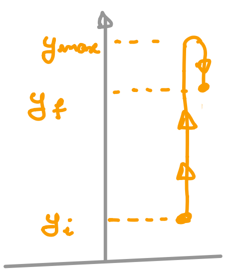
Como vemos também nas Eqs (2) e (8), U é exatamente o que aparece no cálculo do trabalho

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = U(x_i) - U(x_f) \tag{16}$$

Isso não é verdade para todos os tipos de forças, no entanto. As forças para as quais isso é verdade são chamadas de forças conservativas.

Como fazemos para saber se uma força é conservativa ou não? A propriedade mais importante da Eq (16) é que o trabalho só depende dos pontos iniciais e finais, x_i e x_f. Ele não depende do caminho que tomamos para ir de x_i até x_f.

Considere, por exemplo, o trabalho realizado quando fazemos o seguinte movimento:



Ou seja, subimos de y_i até y_{max} e depois descemos de y_{max} até y_f. O trabalho total pode ser quebrado em duas partes

$$
\begin{aligned}
W_{i\to f} &= W_{i\to max} + W_{max\to f} \\
&= \left[U(y_i) - U(y_{max})\right] + \left[U(y_{max}) - U(y_f)\right] \\
&= U(y_i) - U(y_f) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

O termo que depende de y_{max} se cancela. Ir de y_i até y_f requer, portanto, o mesmo trabalho que ir de y_i até y_{max} e depois de y_{max} até y_f. Na 1ª etapa passamos um pouco. Mas na 2ª isso se compensa.

Essa propriedade é o que define uma força conservativa:

Força conservativa é aquela cujo trabalho realizado não depende do caminho.

As forças fundamentais da natureza são todas conservativas. Forças não conservativas são em geral relacionadas com atrito. Falaremos mais sobre elas mais adiante.

—//—

A energia potencial é definida (para forças conservativas) através da Eq. (16).

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = U(x_i) - U(x_f) \tag{18}$$

Como podemos agora inverter essa relação? Ou seja, se sabemos $U(x)$, como calculamos $F(x)$? Vejamos nossos dois exemplos

Força peso: $F = -mg$ $\quad U = mg\,x$

Massa-mola: $F = -kx$ $\quad U = \frac{1}{2} k x^2$

Podemos facilmente sacar um padrão

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \tag{19}$$

A força é, portanto, a derivada da energia potencial. Vejamos agora se isso é compatível com a Eq (18). Substituindo (19) em (18), obtemos

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{x_i}^{x_f} \frac{dU}{dx}\, dx$$

Agora eu uso o truque sujo (mas honesto) de cortar os dx's:

$$W = -\int_{x_i}^{x_f} dU$$

Assim como $\int dx = x$ e $\int dv = v$, teremos $\int dU = U$. Portanto

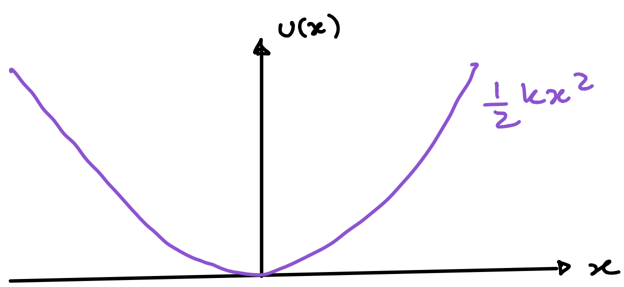
$$W = -U(x)\Big|_{x_i}^{x_f} = U(x_i) - U(x_f)$$

que é a Eq. (18). Ou seja, nosso chute (19) é consistente!

Equilíbrio mecânico

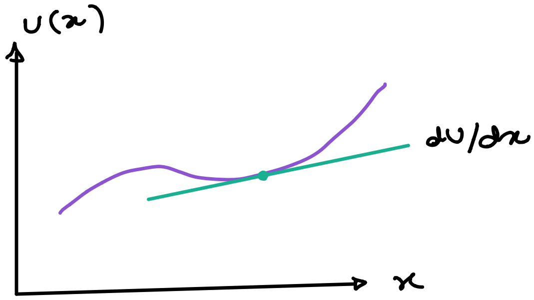
Considere uma partícula sujeita a uma força resultante $F(x)$. Sabemos que o ponto de equilíbrio é o ponto onde a resultante é nula. Por exemplo, um oscilador harmônico com $F(x) = -kx$ tem como ponto de equilíbrio $x=0$, pois esse é o ponto onde $F=0$.

Podemos também analizar essa ideia de equilíbrio sob a ótica da energia potencial. Isso fornece uma interpretação mais rica ao problema. No caso do oscilador harmônico, por exemplo, temos



A energia potencial é uma parábola. Vemos que o ponto de equilíbrio é exatamente o mínimo da energia potencial.

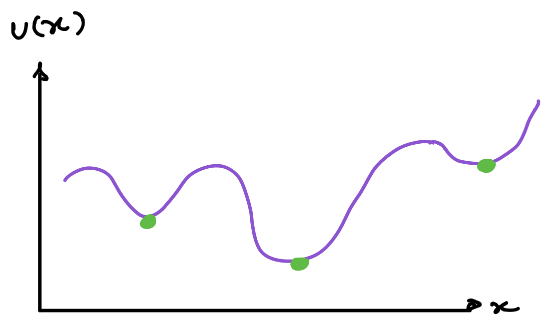
Esse resultado é na verdade bem geral, e muito muito muito importante. Veja só: a derivada é a inclinação da curva.



Como a força está relacionada com a derivada de U, vemos portanto que

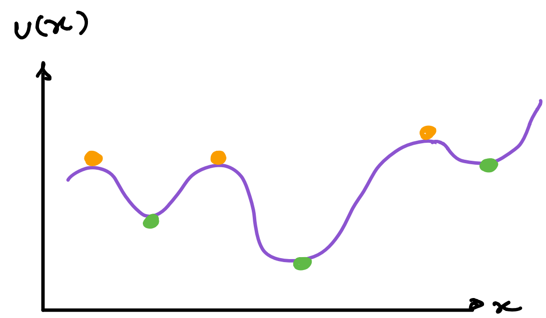
$$\text{Força} = 0 \iff \text{Derivada de } U = 0$$

Mas a derivada é zero sempre que U está num mínimo



Chamamos esses pontos de mínimos locais. Em todos esses pontos a força será nula. Eles serão, portanto, pontos de equilíbrio.

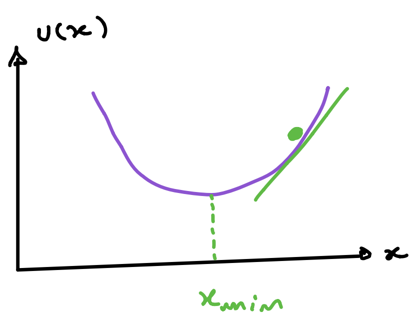
Na verdade eu menti. Existem outros pontos onde a força também se anula: os máximos de $U(x)$.



Máximos de U também são pontos de equilíbrio. Se você colocar uma partícula exatamente num máximo, ela vai ficar lá paradinha. No entanto, esses pontos são pontos de equilíbrio instável. Se deslocarmos a partícula só um pouquinho, ela sai andando e vai embora.

Para entender melhor esse ponto, considere um zoom próximo de um máximo ou mínimo.

Mínimo



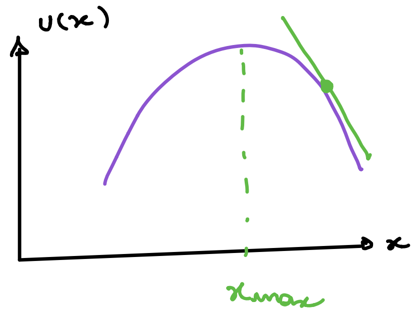
Suponha que a partícula está no ponto da figura. A derivada (inclinação) é positiva, $\frac{dU}{dx} > 0$. Portanto

$$F = -\frac{dU}{dx} < 0$$

A força será negativa. Ou seja, para a esquerda.

Vemos que nesse caso a força será restauradora. Se, por exemplo, estivéssemos à esquerda de x_{min}, a força seria positiva. A força sempre aponta, portanto, em direção ao mínimo.

Máximo



Nesse caso $\frac{dU}{dx} < 0$ e portanto $F > 0$.

A força nos afasta de x_{max}. Esse ponto é portanto instável.