Conservação de energia, pt 2

Nesta aula vamos estudar diversas aplicações do conceito de conservação de energia. Em seguida analisaremos o caso de forças não conservativas e discutiremos o conceito de energia térmica dissipada.

Conservação de energia pode ser resumida pela expressão

$$E = E_{cin} + U = \text{constante} \qquad (1)$$

que vale sempre que o sistema está sob a ação apenas de forças conservativas (sem atrito). Essa Eq. vale para um número arbitrário de partículas. Portanto

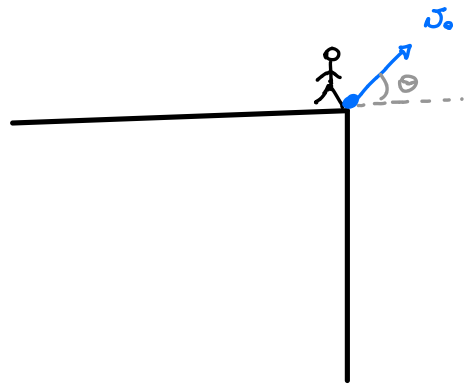
$$E_{cin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (2)$$

ou seja, E_{cin} é a soma da energia cinética de todas as partículas envolvidas.

É importante também nunca esquecer que v_i na equação (2) é o módulo da velocidade. Ou seja,

$$v_i^2 = |\vec{v}_i|^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 \qquad (3)$$

Ex:



Suponha que alguém chuta uma bola de cima de um prédio. Nós sabemos resolver esse problema usando cinemática. Mas usar conservação de energia facilita muito nossa vida.

A energia inicial é, medindo a altura a partir do chão

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg h_0 \qquad (1)$$

Se pudermos desprezar o atrito, essa energia permanecerá a mesma durante todo o movimento

$$E = \frac{1}{2} m v(t)^2 + mg h(t) \qquad (2)$$

onde $h(t)$ e $v(t)$ se referem à altura h e ao <u>módulo</u> da velocidade em qualquer tempo t.

Podemos agora perguntar, por exemplo, qual a altura máxima. Ela ocorre quando a componente y da velocidade se anula. Ou seja, quando

$$v = v_0 \cos\theta \, \hat{i}$$

(eu usei aqui o fato de que v_x é constante). Com isto obtemos

$$\frac{1}{2} m (v_0 \cos\theta)^2 + mg h_{max} = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg h_0$$

ou

$$h_{max} - h_0 = \frac{v_0^2}{2g} (1 - \cos^2\theta) \qquad (3)$$

Note como obtemos um resultado para a diferença $h_{max} - h_0$, que representa o quanto a bola subiu frente a h_0. Ou seja, o resultado físico independe da nossa escolha de referencial (ainda bem).

Outra pergunta que podemos fazer é: qual a velocidade quando a bola atinge o solo. Nesse caso temos $h = 0$ e portanto

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg h_0$$

Ou seja

$$v_f^2 = v_0^2 + 2g h_0 \qquad (4)$$

Teste de sanidade: v_f aumenta com v_0 e v_f aumenta com h_0. Esse resultado diz respeito à velocidade em módulo. Para obtermos a componente y, notamos que como a componente x é constante,

$$\vec{v} = (v_0 \cos\theta)\,\hat{i} + v_{yf}\,\hat{j} \qquad (5)$$

Portanto

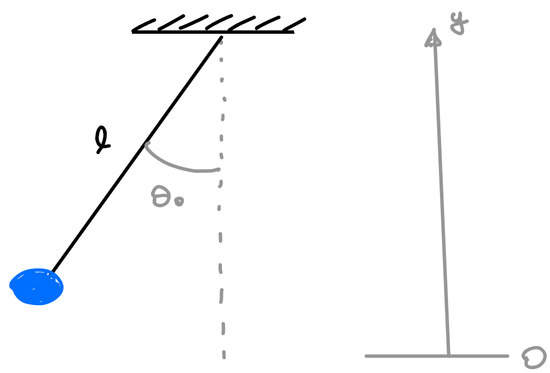
$$v_f^{\,2} = v_0^{\,2} \cos^2\theta + v_{yf}^{\,2}$$

e assim

$$v_{yf}^{\,2} = v_0^{\,2}\,(1 - \cos^2\theta) + mg\,h_0 \qquad (6)$$

A componente y é máxima quando $\theta = \pi/2$ ou $-\pi/2$. Ou seja, quando chutamos a bola para cima ou para baixo.

Ex:



O pêndulo é solto do repouso a um ângulo θ_0.

A energia potencial do pêndulo vale, dado o referencial que eu escolhi:

$$U(\theta) = mg\ell(1-\cos\theta) \tag{7}$$

É fácil cozinhar esse tipo de fórmula: do jeito que eu escolhi meu referencial, precisamos que $U=0$ quando $\theta=0$. Por isso o "$1-\cos\theta$". Além disso, quando $\theta = \pi/2$ devemos ter $U = mg\ell$, o que novamente bate com o "$1-\cos\theta$".

Por conservação de energia, teremos portanto que em qualquer instante do movimento

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = mg\ell(1-\cos\theta_0) \tag{8}$$

Portanto, a velocidade quando o ângulo for θ será

$$v^2 = 2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{9}$$

Note como a fórmula tem que ser consistente: como o pêndulo saiu do repouso, devemos sempre ter $|\theta| < |\theta_0|$. Se isso não fosse verdade, o lado direito da (9) se tornaria negativo, o que não faz sentido.

A velocidade é nula quando $\theta = \theta_0$ e máxima quando $\cos\theta = 1$. Ou seja, no ponto mais baixo da trajetória.

O movimento do pêndulo é circular. No entanto ele não é uniforme. A aceleração terá, portanto, tanto uma componente centrípeta quanto tangencial. Lembre-se, quando falamos de movimento circular, que a fórmula geral para a aceleração é

$$a(t) = r\,\dot{\omega}(t)\,\hat{\theta}(t) - r\,\omega^2(t)\,\hat{r}(t) \qquad (10)$$

onde o 1º termo é a componente tangencial e o segundo a centrípeta. No nosso caso $r = \ell$, o comp. do pêndulo, e $\omega = v/\ell$. Portanto

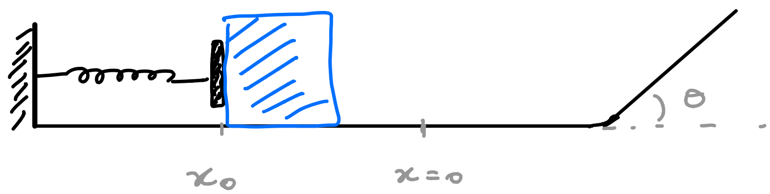
$$a(t) = \dot{v}(t)\,\hat{\theta}(t) - \overbrace{\frac{v(t)^2}{\ell}}^{a_c}\,\hat{r}(t) \qquad (11)$$

A componente centrípeta será, usando (9)

$$a_c = -2g\,(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (12)$$

Assim como $v(t)$, ela se anula em $\theta = \theta_0$ e é máxima em $\theta = 0$.

Ex:



Um bloquinho é usado para comprimir uma mola. Aí soltamos o bloquinho e queremos saber até qual altura ele sobe.

A energia inicial é puramente potencial

$$E = \frac{1}{2} k x^2 \tag{12}$$

Quando que o bloquinho se desprende da mola? Isso ocorre em $x=0$ pois nesse ponto a mola começa a frear, enquanto o bloco segue a vida. A velocidade do bloco nesse ponto será dada por

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_0^2$$

(pois nesse ponto não tem energia potencial). Ou seja

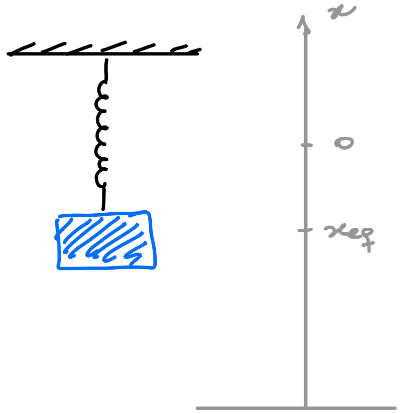
$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\, |x_0| \tag{13}$$

Qual altura ele sobe?

$$mgh = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$\hookrightarrow \quad h = \frac{k x_0^2}{2mg} \tag{14}$$

Ex:



A energia potencial nesse caso será, medida a partir do ponto de equilíbrio natural da mola,

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 + mg\,x \tag{15}$$

Por causa da força peso, no entanto, o sistema vai parar em uma posição diferente, x_{eq}. Essa posição é onde a força resultante é nula:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx - mg \tag{16}$$

Igualando $F=0$ obtemos então

$$x_{eq} = -\frac{mg}{k} \tag{17}$$

O ponto de equilíbrio é negativo, o que faz sentido dada minha escolha de potencial.

Eu posso reescrever a Eq. (15) usando um pouco de malandragem. Da (17) eu escrevo $mg = -kx_{eq}$. Substituindo em (15) obtemos

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - kx_{eq}\, x$$

Agora eu posso completar quadrados. Olha só:

$$U(x) = \frac{k}{2}\left(x^2 - 2x_{eq}\, x\right)$$

quase isso

$$= \frac{k}{2}\left(x - x_{eq}\right)^2 + \text{alguma coisa}$$

Eu quero escrever $x^2 - 2x_{eq}x$ como $(x - x_{eq})^2$? Mas não é exatamente isso pois

$$\frac{k}{2}(x - x_{eq})^2 = \frac{k}{2}(x^2 - 2x_{eq}x) + \frac{k}{2}x_{eq}^2$$

Portanto

$$\frac{k}{2}(x^2 - 2x_{eq}x) = \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2 - \frac{k}{2}x_{eq}^2$$

Ou seja, a energia potencial (15) também pode ser escrita como

$$U(x) = \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2 - \frac{k}{2}x_{eq}^2 \qquad (16)$$

Isso é útil pois o último termo é uma constante e a energia potencial só é definida a menos de uma constante.

Resumindo:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + mgx = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 - \frac{k}{2}x_{eq}^2 \qquad (17)$$

onde $x_{eq} = -mg/k$. Essa nova forma de escrever $U(x)$ é muito útil pois mostra que a energia potencial está relacionada com deslocamentos em torno de x_{eq}.

Suponha, por exemplo, que esticamos a mola mais um pouco até $x_0 < x_{eq}$ (ou seja, $|x_0| > |x_{eq}|$). Quando soltarmos ela vai começar a oscilar em torno de x_{eq}. Conservação de energia diz que

$$\frac{1}{2}k(x_0 - x_{eq})^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 \qquad (18)$$

A velocidade será nula quando $x = x_0$. E ela será máxima quando $x = x_{eq}$. Isso fica claro quando escrevemos

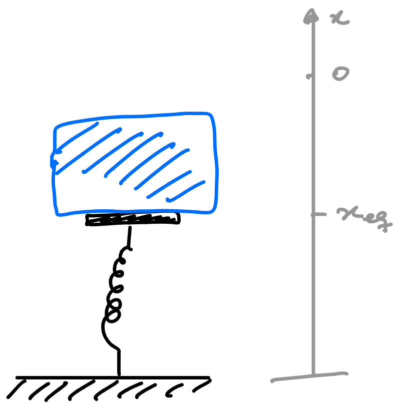
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2}(x_0 - x_{eq})^2 - \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2 \qquad (19)$$

Os dois termos do lado direito são individualmente positivos. Maximizamos v fazendo o último termo ser o menor possível. Ou seja

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{k}{2}(x_0 - x_{eq})^2 \qquad (20)$$

Note como o resultado só depende da diferença $(x_0 - x_{eq})$.
Isso é muito importante: a velocidade não depende da força peso! Ela só depende do quanto deslocamos a mola em comparação com o equilíbrio. A força peso entra só indiretamente em x_{eq}.

Ex:



Esse problema é semelhante ao anterior. A posição de equilíbrio ainda será $x_{eq} = -mg/k$. E a energia potencial será dada pela (17).

Suponha que comprimimos a mola mais um pouco além de x_{eq} e depois soltamos. Quando que o bloco vai se soltar da mola? Isso vai ocorrer novamente em $x=0$ pois, nesse ponto, a mola passa a se contrair enquanto o bloco segue solto.

Isso define um valor mínimo de x_0:

$$x_0^{min} = 2\, x_{eq}. \tag{21}$$

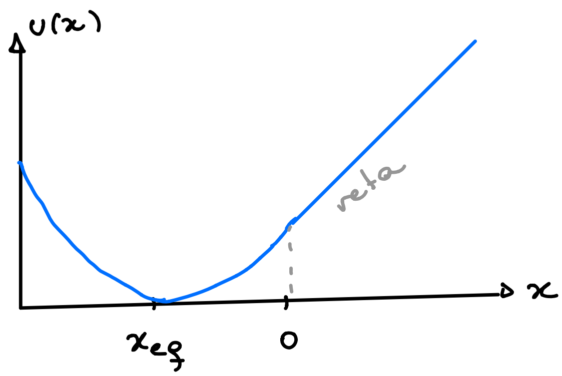
Se $|x_0| < |x_0^{min}|$ o bloco não descola. Se $|x_0| > |x_0^{min}|$ ele descola.

A energia potencial, portanto, não será sempre dada pela (17). Vai depender se $x > 0$ ou não:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2 - \frac{k x_{eq}^2}{2}, & x < 0 \\ mgx, & x > 0 \end{cases} \tag{22}$$

Isso reflete o fato que, como a massa não está grudada na mola, só haverá uma força restauradora quando $x < 0$.

Esse gráfico tem a seguinte cara:



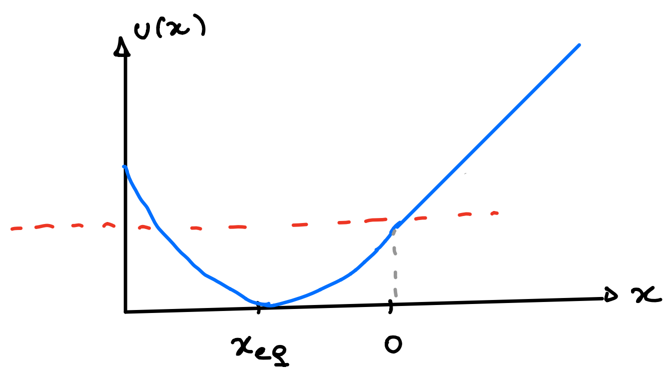
Conservação de energia diz que

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = U(x_0)$$
$$= \frac{k}{2}(x_0 - x_{eq})^2 - \frac{k}{2}x_{eq}^2 \qquad (23)$$

A altura máxima h atingida pela massa ocorre sempre se a velocidade for nula. Ou seja

$$U(x_{max}) = \frac{k}{2}(x_0 - x_{eq})^2 - \frac{k}{2}x_{eq}^2 \qquad (24)$$

Vemos do gráfico que dado um x_0, sempre existe um x_{max} (linha horizontal)



Dependendo de x_0, no entanto, esse x_{max} pode ser >0 ou <0. Quando $|x_0| < |x_{eq}|$, a massa não descola e portanto x_{max} será dado pela relação

$$(x_0 - x_{eq})^2 = (x_{max} - x_{eq})^2 \tag{25}$$

ou seja, ele é o ponto correspondente a x_0, espelhado em torno de x_{eq}.

Quando $|x_0| > |x_{eq}|$, no entanto, a massa descola e obtemos

$$mg\, x_{max} = \frac{k}{2}(x_0 - x_{eq})^2 - \frac{k x_{eq}^2}{2} \tag{26}$$

ou seja, a altura máxima acaba sendo determinada pela força peso.

Forças não conservativas

Ex: resistência com o ar

Vamos agora analisar o caso de forças não conservativas. Na aula 8 estudamos a dinâmica de um objeto que se move sujeito à força de resistência com o ar

A 2ª lei para esse objeto lê-se

$$m\frac{dv}{dt} = -\lambda v \tag{27}$$

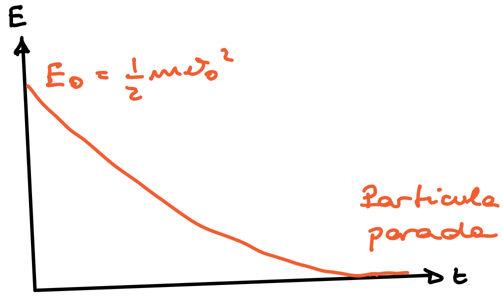
onde λ é o coeficiente de atrito, que depende da geometria do objeto. A solução dessa equação foi discutida na aula 5 e é dada pela função exponencial:

$$v(t) = v_0 \, e^{-\alpha t} \qquad \alpha = \lambda/m \tag{28}$$

Nesse caso não há energia potencial. Portanto toda a energia é cinética

$$E(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \, e^{-2\alpha t} \tag{29}$$

Vemos claramente que a energia não se conserva no tempo. Pelo contrário, ela decai exponencialmente.



A força de atrito é um exemplo de uma força não conservativa. E vemos que ela causa portanto dissipação de energia.

Em 1D todas as forças que dependem de x apenas (ou seja $F(x)$) são conservativas. Forças que dependem de v são não-conservativas. Em 2D e 3D a coisa é mais complicada, como veremos mais adiante: é perfeitamente possível haver forças que só dependem de $\vec{r}$ e são não conservativas.

Potência

O trabalho realizado por uma força é dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \tag{30}$$

Definimos a potência como sendo a taxa de variação do trabalho

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{31}$$

A unidade de potência é o Watt

$$[P] = W = \text{Watt} = 1\,J/s \tag{32}$$

O watt é tão útil que as vezes medimos o trabalho em Wh.

$$1\,Wh = 1\,W \times 3600\,s = 3600\,J$$

A usina de Itaipu, por exemplo, produz 14 GW. Ou seja, ela produz 14×10^9 J por segundo. Já a minha conta de luz no mes passado foi de 127 kWh. Ou seja $127 \times 3600 \times 10^3$ J no total.

Podemos expressar P de outra forma mais conveniente. O trabalho realizado ao percorrermos uma distância infinitesimal dx será

$$dW = F\,dx \tag{33}$$

Portanto

$$P = \frac{dW}{dt} = F\frac{dx}{dt} = F v \tag{34}$$

Mas pela 2ª lei, $F = m\frac{dv}{dt}$. Ou seja

$$P = m\frac{dv}{dt}v \tag{35}$$

Por fim, usamos a regra da cadeia para escrever

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2v\frac{dv}{dt} \tag{36}$$

Ou seja

$$v\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}$$

com isso obtemos finalmente

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{37}$$

Ou seja, a potência é também a taxa de variação da energia cinética.

Resumindo, a potência pode ser descrita pelas seguintes expressões, todas equivalentes:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = F v = m\frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) \qquad (38)$$

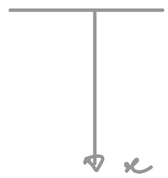
Como exemplo, tomamos o caso da resistência com o ar discutido na Eq. (27). A força seria $F = -\lambda v$. Portanto

$$\mathcal{P} = -\lambda v^2 \qquad (39)$$

A potência nesse caso é sempre negativa: negativa significa que energia está sendo perdida. Falamos nesse caso em potência dissipada. Note como $\mathcal{P}$ aumenta com o atrito λ e também com a velocidade v (quadraticamente). Quando estamos muito rápido, dissipamos muita energia.

A energia dissipada pela força de atrito é convertida em energia térmica que esquenta o ar ao redor da partícula. É isso que faz o ônibus espacial ficar incandescente quando ele reentra na terra. Nenhuma energia é portanto perdida. Energia é simplesmente convertida.

Como um outro exemplo, considere uma partícula em queda livre sob o efeito da resistência com o ar. Neste caso a 2ª lei será



$$m \frac{dv}{dt} = mg - \lambda v \tag{40}$$

A potência dissipada será, portanto,

$$P = F v = (mg - \lambda v)\, v \tag{41}$$

A potência claramente tem duas contribuições, uma sendo a potência injetada pela força peso (que acelera a partícula) e a outra sendo a potência dissipada pelo atrito com o ar.

Um ponto particularmente importante é a velocidade terminal

$$v_{term} = mg/\lambda \tag{42}$$

que corresponde à situação onde a força resultante é nula. Nós vemos que quando o sistema atinge a velocidade terminal, $v_{term} = mg/\lambda$, a potência se anula,

$$P(v_{term}) = 0 \tag{43}$$

Isso ocorre pois todo o trabalho injetado pela força peso é dissipado pelo atrito com o ar

$$P_{peso} = - P_{dissipada} \qquad (44)$$

quando $v = v_{term}$.

—//—

Voltemos agora para a definição de potência, Eq (38). Essas expressões valem para qualquer força, conservativa ou não. Por outro lado, vejamos o que acontece quando a força é conservativa. Uma força conservativa pode ser escrita como

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \qquad (45)$$

Usando isso podemos escrever

$$P = Fv = -\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dt} \qquad (46)$$

Ou seja, para forças conservativas obtemos que a potência também é a variação de energia potencial.

$$P = -\frac{dU}{dt} \quad \text{(só para forças conservativas)} \qquad (47)$$

Combinando isso com o fato de que P é a variação de energia cinética, obtemos

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = -\frac{dU}{dt} \tag{48}$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2 + U\right) = 0 \tag{49}$$

que nada mais é que a conservação de energia total

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{50}$$