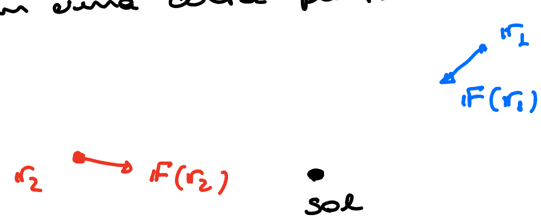
Trabalho e energia em 3D

Nas últimas aulas discutimos em detalhe conceitos relativos a trabalho e energia. No entanto, focamos principalmente em problemas 1D. Nessa aula iremos generalizar esses conceitos para forças arbitrárias em 3 dimensões. Isso vai nos fornecer um formalismo teórico sofisticado para lidar com uma classe bastante geral de problemas.

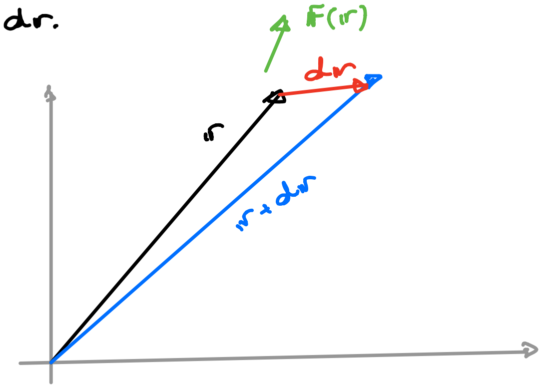
Nós vamos nos interessar aqui por forças que variam de forma arbitrária com a posição, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Isso significa que em cada ponto $\mathbf{r}$ do espaço teremos uma força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ diferente. Aqui, "diferente" se refere a magnitude, direção e sentido.

Por exemplo, considere a força gravitacional exercida pelo sol em uma certa partícula.



Em cada ponto $\mathbf{r}$, eu tenho uma força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ diferente. As vezes usamos inclusive a expressão "campo de força" só para enfatizar que a força atua de forma diferente em diferentes pontos do espaço (e, claro, pois "campo de força" parece um termo do Star Trek).

Consideramos agora o trabalho realizado pela força F ao deslocar uma partícula de um ponto $\mathbf{r}$ até um ponto próximo, $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$.



No ponto $\mathbf{r}$ atua uma força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que não necessariamente aponta na mesma direção. Consideramos o trabalho num pequeno caminho $d\mathbf{r}$, que podemos escrever como

$$d\mathbf{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \qquad (1)$$

Se $d\mathbf{r}$ é realmente pequeno, podemos supor que $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é constante ao longo desse caminho. O trabalho realizado será, portanto

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (2)$$

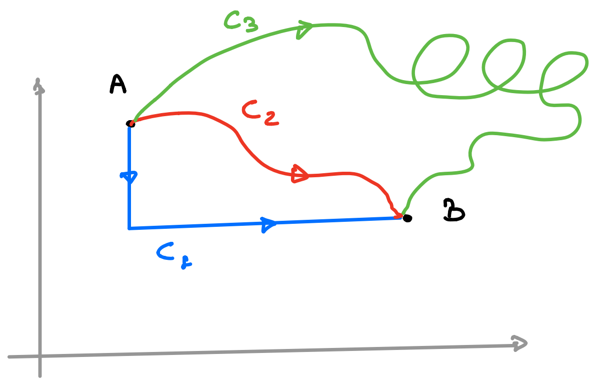
Aqui estamos incluindo a possibilidade de que a força não seja perpendicular ao caminho $d\mathbf{r}$. Isso é feito através do produto escalar "$\cdot$" que discutimos na aula 11. A Eq. (2) é o mesmo que

$$dW = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (3)$$

onde F_i são as componentes de $\mathbf{F}$. Ou seja, você pode, se quiser, pensar na (2) como sendo simplesmente uma forma mais compacta de escrever a (3).

Note também que $F(\mathbf{r})$ é um vetor, $d\mathbf{r}$ é um vetor, mas dW é um escalar.

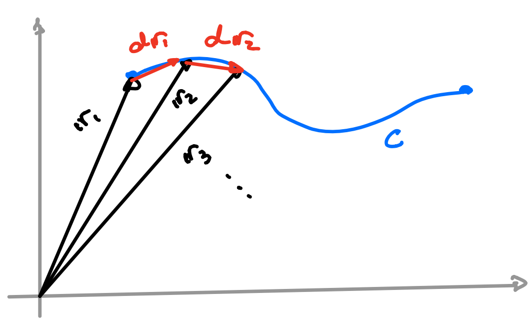
Agora usamos a Eq. (2) como ponto de partida para descrever o trabalho realizado ao longo de um caminho arbitrário. Essa ideia de caminho é muito importante. Em 3D existem várias formas de ir do ponto A ao ponto B.



A figura acima, por exemplo, mostra três caminhos possíveis. Todos começam em A e terminam em B. No entanto, como veremos, o trabalho realizado em cada um pode ser diferente (isso vai acontecer com forças não conservativas).

Veremos logo mais como escrever matematicamente esses caminhos.

Vamos agora considerar o trabalho realizado por uma força $F(\mathbf{r})$ ao longo de um caminho arbitrário C.



Dividimos o caminho em pequenos segmentos, cada um de tamanho $d\mathbf{r}_i$, conectando os pontos $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}_{i+1}$. O trabalho realizado em cada segmento é

$$dW_i = \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot d\mathbf{r}_i \tag{4}$$

Portanto, o trabalho total será

$$W_C = \sum_i \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot d\mathbf{r}_i \tag{5}$$

No limite em que os $d\mathbf{r}_i$ se tornam infinitesimais, essa soma pode ser transformada numa integral

$$W_C = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{6}$$

Essa é a fórmula geral para o trabalho que estávamos procurando. Esse tipo de integral é um pouco especial. É o que chamamos de integral de linha. Ela depende explicitamente do caminho C que escolhemos. Veremos através de exemplos como lidar com esse tipo de objeto.

Ex: Considere uma força meio exótica (e artificial) dada por

$$\mathbf{F} = \alpha x \hat{j} \tag{7}$$

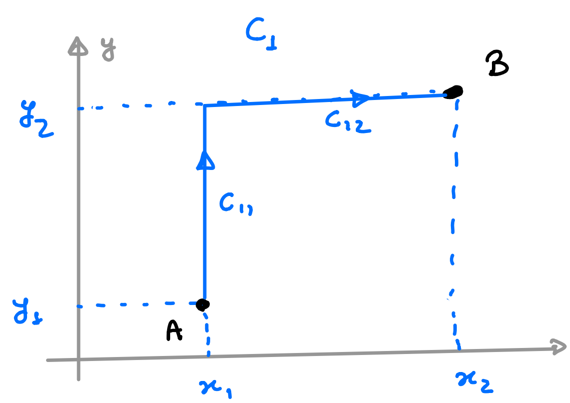
onde α é uma constante. Ou seja, a força só tem componente em y, mas essa componente é uma função de x.

Usando a forma (3) para o produto escalar temos

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \overbrace{F_x dx}^{0} + F_y dy + \overbrace{F_z dz}^{0}$$

$$= \alpha x \, dy \tag{8}$$

Considere agora o seguinte caminho.



Dividimos C_1 em dois: primeiro andamos ao longo do eixo y, de y_1 até y_2, com x fixo em x_1. Depois fixamos o y em y_2 e andamos em x, de x_1 até x_2.

O trabalho ao longo de C_1 será

$$W_{C_1} = \int_{C_{11}} \alpha x \, dy + \int_{C_{12}} \alpha x \, dy \tag{9}$$

Em C_{11} o x está fixo em x_1 enquanto o y varia. Portanto

$$\int_{C_{11}} \alpha x dy = \int_{y_1}^{y_2} \alpha x_1 \, dy$$

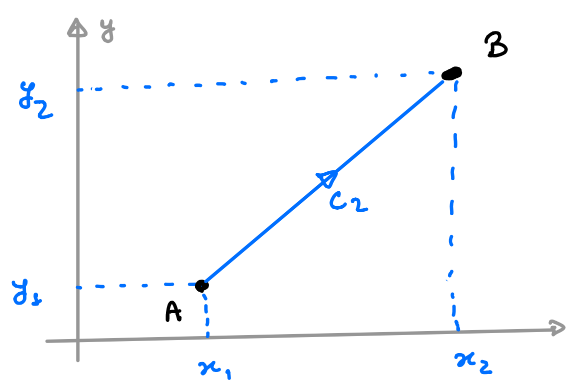
Agora convertemos a integral em algo usual. Aqui αx_1 é constante e portanto obtemos

$$\int_{C_{11}} \alpha x dy = \alpha x_1 \, y \Big|_{y_1}^{y_2} = \alpha x_1 (y_2 - y_1) \qquad (10)$$

Por outro lado, ao longo do caminho C_{12} o y não varia e consequentemente $dy = 0$. Dito de outra forma, ao longo de C_{12} a força $\mathbb{F}$ é perpendicular a $d\mathbb{r}$ e portanto $\mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$. Assim a única contribuição é a da Eq (10) e portanto

$$W_{C_1} = \alpha x_1 (y_2 - y_1) \qquad (11)$$

Vamos agora comparar isso com o seguinte caminho:



Ou seja, andamos em linha reta de (x_1, y_1) até (x_2, y_2).

O trabalho realizado ao longo de C_2 será

$$W_{C_2} = \int_{y_1}^{y_2} \alpha\, x(y)\, dy \tag{12}$$

Aqui temos uma novidade: conforme percorremos o caminho, x vai mudando. Precisamos, portanto, pensar em $x(y)$. Ou seja, em como x varia com y ao longo de C_2.

Como o caminho é uma reta, devemos ter

$$x(y) = ay + b \tag{13}$$

para constantes a e b. Os valores de a e b são determinados a partir dos extremos:

$$x_1 = ay_1 + b$$
$$x_2 = ay_2 + b$$

Portanto

$$a = -\frac{(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)} \qquad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_2 - y_1} \tag{14}$$

Com a Eq. (13), a integral (12) se torna

$$W_{C_2} = \int_{y_1}^{y_2} \alpha\,(ay + b)\, dy \tag{15}$$

que está agora com a cara usual de uma integral. Ou seja, obtemos

$$W_{C_2} = \alpha a \frac{y^2}{2}\Big|_{y_1}^{y_2} + \alpha b y \Big|_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{\alpha a}{2}(y_2^2 - y_1^2) + \alpha b (y_2 - y_1)$$

Inserindo os valores de a e b da Eq. (14) obtemos, após algumas simplificações

$$W_{C_2} = \alpha \frac{(x_1 + x_2)}{2}(y_2 - y_1) \tag{16}$$

Comparando com a Eq. (11) vemos que

$$W_{C_2} \neq W_{C_1} \tag{17}$$

Ou seja, o trabalho realizado depende do caminho que escolhermos percorrer. Isso ocorre, como veremos, para forças não conservativas. Esse é o caso da força em (7).

Vamos agora como isso se compara com a força peso

$$\mathbf{F} = -mg\,\hat{j} \tag{18}$$

Ela é parecida com a (7), mas não depende de x. Para o caminho C_1 teremos novamente só uma contribuição de C_{11}

$$W_{C_1} = \int_{y_1}^{y_2} (-mg)\,dy = -mg\,(y_2 - y_1) \tag{19}$$

Por outro lado, em C_2 temos

$$w_{C_2} = \int_{y_1}^{y_2} (-mg)\,dy \tag{20}$$

Em contraste com a (12), aqui não aparece um $x(y)$, pois a força peso não depende de x. Ou seja, obtemos

$$w_{C_2} = -mg\,(y_2 - y_1) \tag{21}$$

que é o mesmo que C_1. A força peso é uma força conservativa e o trabalho realizado independe do caminho.

Energia potencial

Voltemos agora para nossa expressão geral do trabalho,

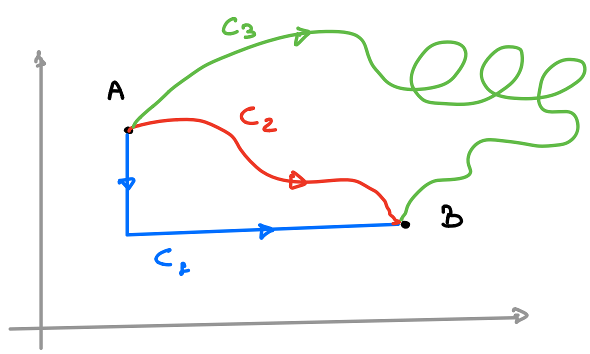
$$W_C = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (22)$$

Já havíamos visto que o trabalho também corresponde à variação de energia cinética.

$$W_C = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \qquad (23)$$

onde $v_A^2 = v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 + v_{Az}^2$ e da mesma forma para v_B^2. Esse resultado é geral e vale para qualquer força $\mathbf{F}$.

Vejamos agora o caso de forças conservativas, onde o trabalho não depende do caminho



Como W só depende dos pontos A e B, podemos portanto definir uma energia potencial $U(\mathbf{r})$ tal que

$$W_{A\to B} = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B) = -\Delta U \qquad (24)$$

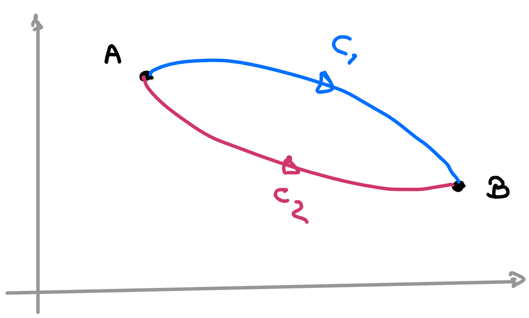
combinando isso com a (23) chegamos à conservação de energia

$$\Delta E = 0 \tag{25}$$

onde

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(r) \tag{26}$$

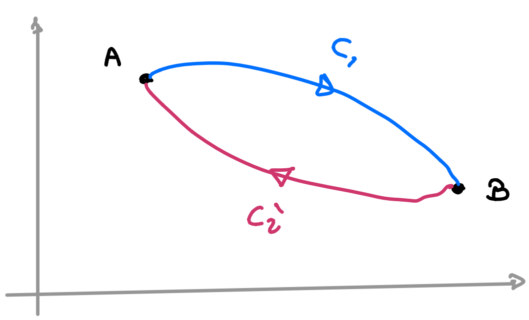
Existe também uma outra forma de estabelecer se uma força é conservativa ou não. como o trabalho não depende do caminho temos que



$$W_{C_1} = W_{C_2} \tag{27}$$

$$\hookrightarrow W_{C_1} - W_{C_2} = 0$$

Esse termo $-W_{C_2}$ pode ser visto como o trabalho realizado no caminho inverso de C_2



$$W_{C_2'} = - W_{C_2} \tag{28}$$

Portanto, combinando (27) e (28) chegamos a

$$W_{C_1} + W_{C_2'} = 0 \qquad (29)$$

Esse caminho combinado $C_1 + C_2$, no entanto, é agora um caminho fechado. Ou seja, um caminho que começa e termina no mesmo lugar.

Concluímos desse argumento que para forças conservativas, o trabalho ao longo de um caminho fechado é sempre nulo: escrevemos isso como

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad \text{(conservativas)} \qquad (30)$$