Derivadas parciais e gradiente

Uma força conservativa em 3D é descrita por uma energia potencial $U(\mathbf{r})$ ou $U(x,y,z)$. Ou seja, por uma função que depende das 3 coordenadas, tal que

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B) \qquad (1)$$

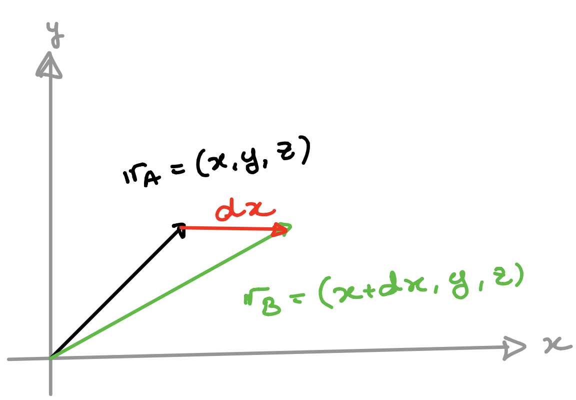
que vale p/ qualquer caminho C que começa em A e termina em B.

Mas como fazemos para extrair a força $\mathbf{F}$ a partir de $U(\mathbf{r})$? Note que U é um escalar ao passo que $\mathbf{F}$ é um vetor. Precisamos, portanto, de uma operação que produza um vetor a partir de um escalar.

Considere a Eq. (1) para um caminho puramente na direção x:

$$d\mathbf{r} = dx\,\hat{i} \qquad (2)$$

Além disso, suponha que $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$ estão muito próximos um do outro:



$$\mathbf{r}_A = (x, y, z)$$
$$\mathbf{r}_B = (x+dx, y, z) \qquad (3)$$

Como $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$ estão muito próximos o lado esquerdo da Eq. (1) pode ser aproximado por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F_x \, dx \approx F_x(x,y,z)\, dx \qquad (4)$$

onde $F_x(x,y,z)$ é a componente x de $\mathbf{F}$, que pode depender de x, y e z.

Já o lado direito da (1) se torna, devido à (3),

$$U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B) = U(x,y,z) - U(x+dx, y, z) \qquad (5)$$

Combinando (4) e (5) chegamos portanto a

$$F_x \, dx = U(x,y,z) - U(x+dx, y, z)$$

ou

$$F_x = -\left[\frac{U(x+dx, y, z) - U(x,y,z)}{dx}\right] \qquad (6)$$

Você pode reparar agora que isso tem a cara de uma derivada em x. Isso é o que chamamos de derivada parcial. Derivamos com relação a x, mantendo y e z constantes.

Ou seja, tomando o limite $dx \to 0$ obtemos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (7)$$

O símbolo "∂", que lê-se "del" serve apenas para enfatizar que a derivada em questão é parcial. Ou seja, mantendo y e z fixos.

A Eq. (7) mostra, portanto, que a componente x é obtida derivando U com relação a x. Claro, a conta para as componentes y e z serão idênticas. Ou seja, temos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{8}$$

Essa Eq. mostra que no caso de forças conservativas, as 3 funções $F_x(\mathbf{r})$, $F_y(\mathbf{r})$ e $F_z(\mathbf{r})$ na verdade vem todas de uma única função $U(\mathbf{r})$.

Ex:

Para praticar com derivadas parciais, considere o seguinte exemplo:

$$U(x,y,z) = \lambda x^2 y z + \gamma x z$$

Para derivar com relação a x, mantemos todo o resto constante. Por exemplo

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda x^2 y z) = \lambda y z \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x^2)}_{2x} = 2\lambda x y z$$

Com isso obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\lambda xyz + \gamma z$$

Da mesma forma

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda x^2 z \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \lambda x^2 y + \gamma x$$

—//—

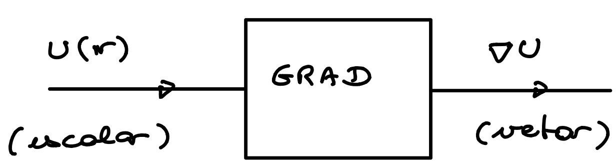
Combinando as 3 componentes de (8) podemos escrever o vetor $\mathbb{F}$ como

$$\mathbb{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} \qquad (9)$$

Esse tipo de estrutura é muito comum. Por isso definimos o gradiente de $U(\mathbb{r})$ como

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} \qquad (10)$$

O gradiente transforma a função $U(\mathbb{r})$, que é um escalar, num vetor



Com isso a força (9) fica finalmente escrita como

$$\mathbb{F} = -\nabla U \tag{11}$$

#elegância.

—//—

Ex: íons aprisionados

Hoje em dia conseguimos produzir armadilhas que aprisionam um único átomo. Isso mesmo: um único fucking átomo!

Isso é feito ionizando o átomo (arrancando um elétron, para que ele fique carregado) e aplicando uma combinação de campos elétricos e magnéticos. A armadilha mais popular é a chamada armadilha de quadrupolo. Ela produz um potencial que tem a seguinte forma

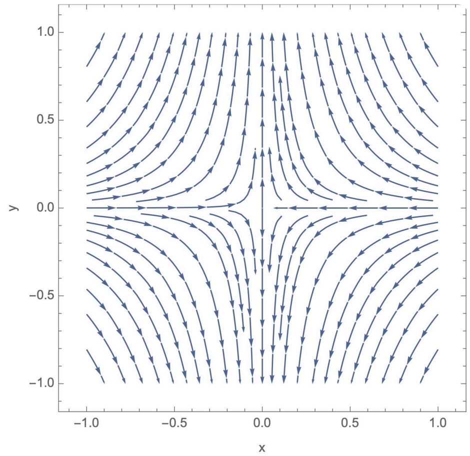
$$U = \frac{A}{2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) \tag{12}$$

onde A é uma constante.

A força produzida por essa energia potencial é calculada a partir da (9):

$$\mathbb{F} = A\left(-x\hat{i} - y\hat{j} + 2z\hat{k}\right) \tag{13}$$

Como você pode ver, essa força tem a seguinte cara:



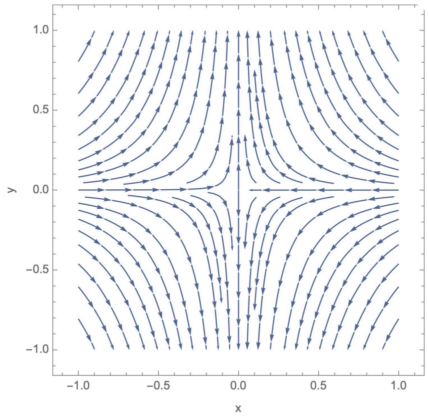
Ou seja, essa armadilha parece meio ruim. Nas direções x e y temos uma força restauradora, como a do oscilador harmônico. Ou seja, uma força que tende a trazer a partícula ao centro. Na direção z, no entanto, o efeito da força é contrário: ele expele a partícula.

Esse é um problema de usar campos eletromagnéticos. Não é possível fazer uma configuração de campos tal que a força sempre aponte para dentro (que é o que gostaríamos de uma armadilha).

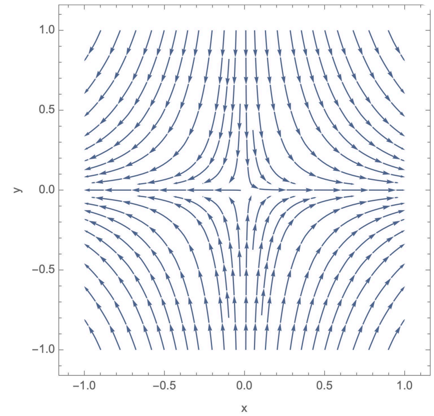
Para resolver esse problema o que se faz é tornar a constante A dependente do tempo, de tal forma que ela oscile entre valores positivos e negativos. Por exemplo $A(t) = A_0 \cos(\omega t)$. Isso é feito usando correntes alternadas.

Se A é negativo o diagrama de forças se inverte

$A > 0$



$A < 0$



Agora a força é restauradora em z mas não em x, y.
Se fazemos $A(t)$ oscilar, ficamos alternando entre esses dois comportamentos. Escolhendo a frequência de oscila-ção de forma apropriada torna-se possível manter o íon aprisionado.

Outro teste para saber se uma força é conservativa

Derivadas parciais satisfazem uma propriedade muito importante: a ordem com que derivamos não importa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \qquad (14)$$

onde

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

vejamos um exemplo:

$$U = x^2 y^3 + 2x$$

Nesse caso

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy^3 + 2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2y^2$$

Agora derivamos $\partial U/\partial x$ com relação a y:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3 + 2\right) = 6xy^2$$

Por outro lado

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2\right) = 6xy^2$$

Da no mesmo! :)

Essa propriedade segue diretamente da definição de derivada parcial, Eq. (6). Eu vou deixar como exercício para você checar que isso de fato é verdade.

A Eq. (14) fornece um teste super útil para saber se uma força é conservativa ou não. Basta testar se

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{15a}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_z}{\partial x} \tag{15b}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_z}{\partial x} \tag{15c}$$

Se for verdade então $\mathbb{F}$ é conservativa

Por que isso da certo? Veja só: se $\mathbb{F}$ é conservativa então ela tem que vir de uma energia potencial $U(\mathbf{r})$. Ou seja

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Da (45a), por exemplo, obtemos então que

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

que devem ser iguais por causa da (14).

Por outro lado, quando $\mathbb{F}$ não é conservativa significa que não é possível definir uma $U(\mathbb{r})$ que forneça $\mathbb{F}$ e, consequentemente, a (15) não vai ser verdade.

Ex: $\mathbb{F} = \alpha x \hat{j}$ [Exemplo usado na aula passada].

$F_x = 0, \quad F_y = \alpha x$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \alpha$$

Não são iguais.
A força não é conservativa.

Ex: força gravitacional
$$\mathbb{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\mathbb{r}} \qquad (16)$$

É mais conveniente escrever $\hat{\mathbb{r}} = \mathbb{r}/r$ e portanto

$$\mathbb{F} = -\frac{GMm\,\mathbb{r}}{r^3} \qquad (16')$$

A componente x será, por exemplo,

$$F_x = -\frac{GMmx}{r^3} = \frac{-GMm\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (17)$$

Vamos testar, por exemplo, a Eq. (15a). Para começar, precisamos derivar F_x com relação a y. Podemos usar a regra da cadeia

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \qquad (18)$$

(Ela permanece válida para derivadas parciais). Temos então

$$\frac{\partial F_x}{\partial r} = -GMmx\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-3}\right)$$

$$= -GMmx\left(-\frac{3}{r^4}\right)$$

$$= \frac{3GMmx}{r^4} \qquad (19)$$

Além disso
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Aqui usamos a regra da cadeia novamente. Definimos a variável temporária $A = x^2 + y^2 + z^2$, de tal forma que

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{A(y)}}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial y}$$

As duas derivadas restantes agora sabemos fazer:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \left(- \frac{1}{2} A^{-1/2} \right) (2y)$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto

$$\frac{\partial r}{\partial y} = - \frac{y}{r} \tag{20}$$

Juntando (19) e (20) em (18) obtemos

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{3GMmx}{r^4} \left(\frac{-y}{r} \right) \tag{21}$$

Para saber se $\mathbb{F}$ é conservativa, precisamos agora comparar isso com $\frac{\partial F_y}{\partial x}$. Assim como em (18), escrevemos

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \tag{22}$$

Nesse ponto não precisamos fazer mais nenhuma conta.
Podemos explorar a simetria do problema. Olha só: a variável r trata x e y em pé de igualdade. Portanto, da Eq. (20)

$$\text{se} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y}{r} \quad \xrightarrow{\text{simetria}} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r} \tag{23}$$

Tem que ser assim. A conta é simétrica!

O mesmo vale para a Eq. (19):

$$\frac{\partial F_x}{\partial r} = \frac{3GMmx}{r^4} \quad \xrightarrow{\text{simetria}} \quad \frac{\partial F_y}{\partial r} = \frac{3GMmy}{r^4} \tag{24}$$

com isso a (22) se torna

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{3GMmy}{r^4}\left(-\frac{x}{r}\right) \tag{25}$$

comparando (21) e (25) vemos que

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Para concluir que a força é conservativa, precisamos também checar (15b) e (15c). Mas, de novo, por simetria, se (15a) é válida então (15b) e (15c) também <u>tem</u> de ser.

Ex: $\mathbf{F} = \frac{A}{r}\left(-x\hat{i} - y\hat{j} + 3\hat{k}\right)$

Eu vou deixar esse exemplo como exercício. Apenas gostaria de fazer 2 comentários. Primeiro, simetria: note como essa força é simétrica em relação a x e y, mas não em relação a z. Então, por exemplo, se sabemos $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ podemos obter $\frac{\partial F_y}{\partial x}$ trocando $x \leftrightarrow y$. O mesmo vale para $\frac{\partial F_x}{\partial z}$ e $\frac{\partial F_y}{\partial z}$. Mas, por exemplo, não dá para saber $\frac{\partial F_z}{\partial x}$ a partir de $\frac{\partial F_x}{\partial z}$.

O meu segundo comentário é que essa força não é conservativa. Mas para ver isso tem que fazer os 3 testes (15a), (15b) e (15c). Só o (15a) não é suficiente. De fato, você vai obter que

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

mas

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} \neq \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} \neq \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Ou seja, uma força só é conservativa quando os 3 testes da Eq. (15) são satisfeitos.

Superfícies equipotenciais

Voltemos lá para o começo. A derivada parcial de U com relação a x é

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x+dx,\, y,\, z) - U(x,y,z)}{dx} \qquad (26)$$

para um dx muito pequeno. As derivadas $\partial U/\partial y$ e $\partial U/\partial z$ são definidas da mesma maneira. Disso podemos então escrever

$$U(x+dx,\, y,\, z) - U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx \qquad (27)$$

Isso fornece o quanto U muda ao andarmos de $\mathbf{r} = (x,y,z)$ até $(x+dx,\, y,\, z)$. O resultado é a derivada parcial naquela direção vezes a magnitude do quanto andamos.

E se agora quisermos calcular o quanto U muda ao andarmos em uma direção arbitrária, que não x, y ou z? Considere, por exemplo, uma certa direção

$$d\mathbf{s} = ds_x\, \hat{i} + ds_y\, \hat{j} + ds_z\, \hat{k} \qquad (28)$$

Queremos calcular

$$dU := U(\mathbf{r} + d\mathbf{s}) - U(\mathbf{r}) \qquad (29)$$

Ou seja, o quanto a energia potencial muda ao irmos de $\mathbf{r}$ para $\mathbf{r}+d\mathbf{s}$. Para calcular U, somamos zero

$$dU = U(x+ds_x,\ y+ds_y,\ z+ds_z) - U(x,y,z)$$

$$= U(x+ds_x,\ y+ds_y,\ z+ds_z) - U(x+ds_x, y+ds_y, z)$$

$$+ U(x+ds_x, y+ds_y, z) \quad - U(x+ds_x, y, z) \tag{30}$$

$$+ U(x+ds_x, y, z) - U(x,y,z)$$

Os dois termos em azul são iguais mas com sinais opostos. Eles portanto se cancelam. O mesmo vale para os termos em vermelho. Ou seja, somamos zero.

O motivo pelo qual eu fiz isso é por que agora podemos associar cada linha a uma derivada parcial usando a (27). Por exemplo

$$3^{\underline{a}} \text{ linha da } (30) = U(x+ds_x, y, z) - U(x,y,z) \tag{31}$$

$$= \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} ds_x$$

No caso da $2^{\underline{a}}$ linha da para fazer algo semelhante. Note como na $2^{\underline{a}}$ linha x está fixo em $x+ds_x$. Só estamos mudando a componente y. Ou seja

2ª linha da (30) = $U(x+ds_x, y+ds_y, z) - U(x+ds_x, y, z)$

$$= \frac{\partial U(x+ds_x, y, z)}{\partial y} ds_y \qquad (32)$$

Ao contrário da (31), a derivada aqui é avaliada em $(x+ds_x, y, z)$ ao invés de (x, y, z). Mas na verdade isso não importa: os dois pontos são tão próximos que podemos aproximar

$$\frac{\partial U(x+ds_x, y, z)}{\partial y} \simeq \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}$$

Com isso a 2ª linha se torna

$$\text{2ª linha de (30)} = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} ds_y \qquad (33)$$

Você já está vendo onde vamos chegar. Na 1ª linha temos

$$\text{3ª linha de (30)} = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} ds_z \qquad (34)$$

Portanto, somando tudo obtemos

$$dU = U(\mathbf{r}+d\mathbf{s}) - U(\mathbf{r}) = \frac{\partial U}{\partial x} ds_x + \frac{\partial U}{\partial y} ds_y + \frac{\partial U}{\partial z} ds_z \qquad (35)$$

A lógica é a mesma da (27). Apenas somamos a contribuição de cada direção.

Usando a noção de gradiente na Eq. (10) podemos escrever esse resultado de forma mais elegante:

$$U(\mathbf{r}+d\mathbf{s}) - U(\mathbf{r}) = \left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right] \cdot \left[ds_x\,\hat{i} + ds_y\,\hat{j} + ds_z\,\hat{k}\right]$$

Ou seja

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (36)$$

Podíamos ter derivado esse resultado da definição de trabalho infinitesimal, $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}+d\mathbf{s})$. Mas eu achei que seria legal derivá-lo aqui de forma mais autocontida, usando apenas derivadas parciais.

A Eq. (36) é super bacana. Ela fornece uma forma de saber como a energia potencial varia quando andamos numa direção arbitrária do espaço. Vemos que isso está relacionado com o gradiente de U e, portanto, com a força $\mathbf{F} = -\nabla U$.

A ideia é mais ou menos a seguinte. Suponha que você está imerso num campo de força descrito por $U(\mathbf{r})$. Aí você quer saber: se eu dou um passo numa direção qualquer $d\mathbf{s}$, quanto que muda a minha energia? A Eq. (36) diz que essa mudança depende do produto escalar entre $\mathbf{F}$ e $d\mathbf{s}$.

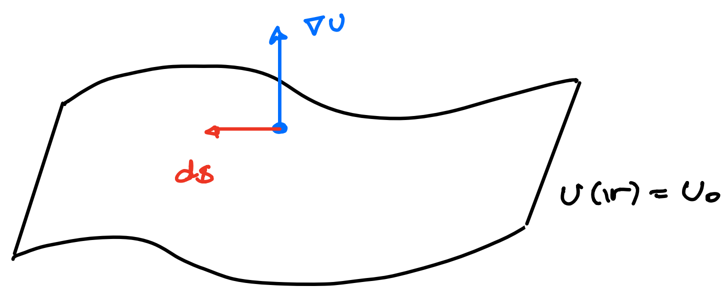
Particularmente interessante são aquelas direções onde a energia não muda. Ou seja, $U(\mathbf{r}+d\mathbf{s}) = U(\mathbf{r})$. Isso ocorre quando $\mathbf{F}$ é perpendicular a $d\mathbf{s}$, pois nesse caso o produto escalar é zero. No caso da força peso, por exemplo, $\mathbf{F} = -mg\,\hat{k}$ e portanto deslocamentos ao longo de $\hat{i}$ ou $\hat{j}$ não mudam a energia potencial.

Isso introduz a ideia de superfície equipotencial. Ou seja, superfícies no espaço onde a energia é constante

$$U(x,y,z) = U_0 = \text{constante} \tag{37}$$

No caso da força peso, por exemplo, as superfícies equipotenciais são planos com altura z constante.

Da (36) vemos que $U(\mathbf{r}+d\mathbf{s}) = U(\mathbf{r})$ sempre que $d\mathbf{s}$ for perpendicular a ∇U (ou $\mathbf{F}$, mesma coisa). Portanto, ∇U será sempre perpendicular à uma superfície equipotencial



Concluímos portanto que

"∇U ou $\mathbb{F}$ é sempre normal à superfície equipotencial." (38)

A palavra normal significa o mesmo que perpendicular.

Outra coisa que podemos concluir da Eq (36) é qual a direção de maior aclive. Ou seja, em qual direção U muda mais significativamente? A resposta é quando $d\mathbb{S}$ é paralelo a ∇U. Portanto

"∇U estabelece a direção de máximo aclive de U" (39)

A Eq. (36) é também menos o trabalho realizado em irmos de $\mathbb{r}$ até $\mathbb{r}+d\mathbb{S}$:

$$dW = \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = U(\mathbb{r}) - U(\mathbb{r}+d\mathbb{S}) \tag{40}$$

Vemos, portanto, outra interpretação para as superfícies equipotenciais: deslocamentos ao longo de equipotenciais não realizam trabalho.

Por último, discutimos a ideia de derivada direcional. Da (36) temos

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{s} \tag{41}$$

Vamos agora escrever

$$d\mathbf{s} = ds\, \hat{\mathbf{s}} \tag{42}$$

onde $\hat{\mathbf{s}}$ é um versor especificando a direção de $d\mathbf{s}$, ao passo que ds é a magnitude. Com isso a (41) se torna

$$dU = (\nabla U \cdot \hat{\mathbf{s}})\, ds \tag{43}$$

onde eu coloquei entre parênteses a parte vetorial, que entra de fato no produto escalar. Definimos agora a derivada direcional como

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \nabla U \cdot \hat{\mathbf{s}} \tag{44}$$

Isso representa a derivada de U ao longo de uma direção $\hat{\mathbf{s}}$. A variação total de U será, então

$$dU = \frac{\partial U}{\partial s}\, ds \tag{45}$$

Forças centrais

Uma força $\mathbb{F}$ é chamada de central quando ela pode ser escrita como

$$\mathbb{F} = F(r)\,\hat{\mathbb{r}} \qquad (46)$$

Ou seja, quando ela tem a direção do vetor posição $\hat{\mathbb{r}}$ e a magnitude/sentido dependendo apenas da distância $F(r)$.

O principal exemplo é a força gravitacional

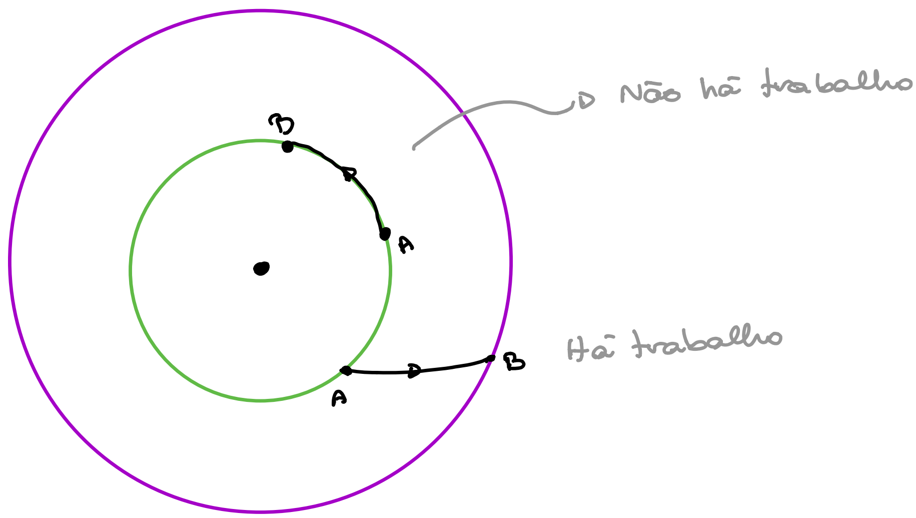
$$\mathbb{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\mathbb{r}} \quad \rightsquigarrow \quad F(r) = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (47)$$

A energia potencial nesse caso é dada por

$$U(\mathbb{r}) = -\frac{GMm}{r} \qquad (48)$$

Eu deixo como exercício para vocês checarem que de fato $\mathbb{F} = -\nabla U$.

Como $\mathbb{F}$ aponta na direção $\hat{\mathbb{r}}$, as superfícies equipotenciais serão sempre tangenciais (ou seja, na direção de $\hat{\theta}$). Portanto, a força gravitacional não realiza trabalho quando nos movemos ao longo da mesma órbita



Finalmente, podemos aplicar o conceito de derivada direcional para calcular $\mathbb{F}$ a partir de U. Sabemos que

$$dU = \nabla U \cdot d\vec{s} = -\mathbb{F} \cdot d\vec{s} \tag{49}$$

Além disso, sabemos que

$$dU = \frac{\partial U}{\partial s} ds \tag{50}$$

Escolhemos agora $d\vec{s} = dr\, \hat{\mathbb{r}}$ (ou seja, um deslocamento na direção $\hat{\mathbb{r}}$). Como $\mathbb{F} = F(r)\, \hat{\mathbb{r}}$ obtemos da (49):

$$dU = -F(r)\, dr$$

Comparando com a (50), vemos então que

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \tag{51}$$

Isso fornece uma forma muito mais simples de calcular F a partir de U no caso de forças centrais. Por exemplo, quando

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

obtemos

$$F(r) = (-1)(-1)(-1)\frac{GMm}{r^2}$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}$$

como esperado.