# Sistema de duas partículas

Nessa aula tenha em mente o seguinte salmo da Bíblia:

João 13:4 - "Nunca dividirás por um vetor"

Considere um sistema de duas partículas, com massas $m_1$ e $m_2$. Se esse sistema estiver isolado do resto do universo, então a única força que pode atuar sobre 1 será devido à 2 e vice-versa. Ou seja, a 2ª lei para cada uma das partículas lê-se

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{1(2)} \qquad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{2(1)}$$

A notação $\mathbf{F}_{i(j)}$ se refere à força que $j$ produz em $i$.

Pela 3ª lei (ação e reação), essas duas forças devem ser opostas e de mesma magnitude

$$\mathbf{F}_{1(2)} = -\mathbf{F}_{2(1)} \qquad (2)$$

Consideramos agora o momento total do sistema

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \qquad (3)$$

Usando (1) concluímos que

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{2(1)} = 0 \qquad (4)$$

onde na última passagem eu usei também a Eq. (2).

Já tínhamos visto esse resultado antes:

- "O momento total de um sistema isolado é uma constante do movimento"

Nessa aula exploraremos as consequências desse resultado.

Suponha agora que $m_1$ e $m_2$ não estão mais isolados. Nesse caso, além das forças internas $\mathbb{F}_{i(j)}$, podem haver também forças externas $F_i^{ext}$. Ou seja, a Eq. (1) se torna

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{dt} = \mathbb{F}_{1(2)} + \mathbb{F}_1^{ext}$$
$$\frac{d\mathbb{P}_2}{dt} = \mathbb{F}_{2(1)} + \mathbb{F}_2^{ext} \qquad (5)$$

Para se ter um exemplo, imagine que $m_1$ é a terra e $m_2$ é a lua. Nesse caso $\mathbb{F}_{1(2)}$ e $\mathbb{F}_{2(1)}$ se referem à força gravitacional entre terra e lua. Já $\mathbb{F}_i^{ext}$ se refere às outras forças gravitacionais, por exemplo do sol e dos outros planetas. Essas forças são "externas" pois estamos considerando aqui que o nosso "sistema" é só a terra e a lua.

Da Eq. (5) vemos que

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \frac{d\mathbb{P}_1}{dt} + \frac{d\mathbb{P}_2}{dt} = \left[\mathbb{F}_{1(2)} + \mathbb{F}_1^{ext}\right] + \left[\mathbb{F}_{2(1)} + \mathbb{F}_2^{ext}\right]$$

$$= \mathbb{F}_1^{ext} + \mathbb{F}_2^{ext}$$

ou seja

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \mathbb{F}_1^{ext} + \mathbb{F}_2^{ext} := \mathbb{F}^{ext} \qquad (6)$$

O momento total não é mais conservado; sua variação está relacionada com a força externa total.

Esse resultado nos motiva a introduzir o conceito de centro de massa. Imagine um frasco de perfume caindo em direção ao chão. Dentro do frasco existem várias forças internas relacionadas com as interações moleculares. Mas, ao mesmo tempo, todas as moléculas do frasco estarão sujeitas à força gravitacional. Como consequência, o frasco como um todo cai, apesar dos movimentos internos continuarem.

Separamos dessa forma o movimento do centro de massa, que é regido apenas pelas forças externas $\mathbb{F}^{ext}$, do movimento interno, regido pelas forças $\mathbb{F}_{i(j)}$.

O centro de massa se move como se fosse uma partícula pontual, de massa

$$M = m_1 + m_2 \qquad (7)$$

e momento total $\mathbb{P} = p_1 + p_2$. Definimos também a posição do centro de massa $\mathbb{R}$ como sendo tal que

$$\mathbb{P} = M \frac{d\mathbb{R}}{dt} \qquad (8)$$

Mas por outro lado

$$\mathbb{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2\right) \qquad (9)$$

comparando (8) com (9) chegamos a

$$\frac{d}{dt}(M\mathbb{R}) = \frac{d}{dt}\left(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2\right) \qquad (10)$$

Ou seja

$$\mathbb{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (11)$$

A posição do centro de massa é, portanto, uma média ponderada das posições $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, com pesos $\frac{m_1}{M}$ e $\frac{m_2}{M}$.

Vamos analizar alguns casos limite.

- Se $m_1 = m_2 = m$ obtemos $M = 2m$ e portanto

$$\mathbb{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \qquad (12)$$

Ou seja, o centro de massa é exatamente no meio do caminho entre $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$.

- Se $m_1 \gg m_2$ então $M \approx m_1$ e portanto

$$\frac{m_1}{M} \approx 1 \qquad \frac{m_2}{M} \approx 0 \qquad (13)$$

Consequentemente

$$\mathbb{R} \approx \mathbb{r}_1 \tag{14}$$

ou seja, o centro de massa será praticamente na posição do corpo pesado.

É isso que acontece, por exemplo, no sistema terra - sol. A massa da terra é da ordem de $10^{-6}$ da massa do sol. Portanto, o centro de massa está praticamente na posição do sol

— 11 —

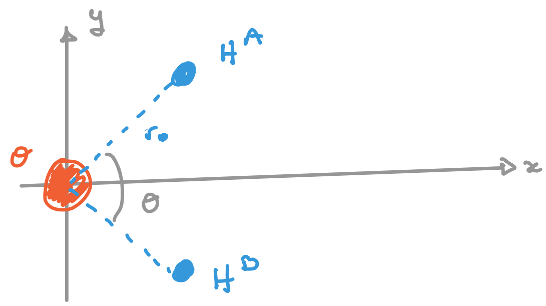
Voltando agora para a Eq. (6) e (8), vemos que

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = M\frac{d^2\mathbb{R}}{dt^2} = \mathbb{F}^{ext} \tag{15}$$

Ou seja, o centro de massa obedece a uma 2ª lei, mas sujeito somente às forças externas. Isso explica, por exemplo, por que podemos descrever a queda livre de um corpo sem ter que se preocupar com as forças internas que mantêm o corpo unido.

Da Eq. (15) concluímos que o momento total de um sistema será conservado quando a força externa total se anular. Nesse caso, o CM vai se mover com um movimento retilínio e uniforme.

## Exemplo: CM de uma molécula de $H_2$




$m_H = 1$

$m_O = 16$

$r_0 = 96 \text{ pm} = 96 \times 10^{-12} \text{ m}$

$\theta = 104,5°$

Escolhemos o referencial como na figura. As posições de cada átomo serão, portanto

$$\mathbf{r}(O) = 0$$

$$\mathbf{r}(H^A) = r_0 \cos(\theta/2)\,\hat{i} + r_0 \sin(\theta/2)\,\hat{j}$$

$$\mathbf{r}(H^B) = r_0 \cos(\theta/2)\,\hat{i} - r_0 \sin(\theta/2)\,\hat{j}$$

Da Eq. (11):

$$\mathbf{R} = \frac{\overbrace{m_O\, \mathbf{r}(O)}^{0} + m_H\, \mathbf{r}(H^A) + m_H\, \mathbf{r}(H^B)}{m_O + 2m_H}$$

Note que

$$\mathbf{r}(H^A) + \mathbf{r}(H^B) = 2 r_0 \cos(\theta/2)\,\hat{i}$$

Portanto

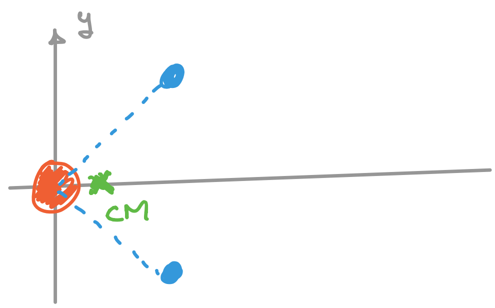
$$\mathbf{R} = \frac{(2m_H)\; 2r_0 \cos(\theta/2)}{m_O + 2m_H}\,\hat{i} = \frac{2}{9} r_0 \cos(\theta/2)\,\hat{i}$$

onde eu substitui apenas os valores de $m_H$ e $m_O$. Note como o CM é no eixo x, o que faz sentido por simetria. O fato 2/9 está relacionado com o fato que o O é muito mais pesado. Finalmente, R depende de $\cos(\theta/2)$. Se $\theta = 180°$ teríamos $R = 0$.

Substituindo o valor para $\theta$ obtemos

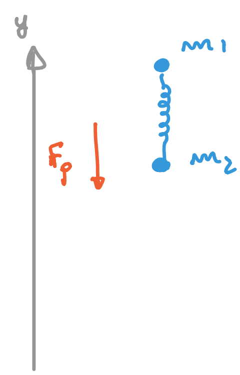
$$\frac{2}{9}\cos(\theta/2) \simeq 0.13.$$

Ou seja, o CM está a 13/100 da distancia do



## Movimento relativo ao CM

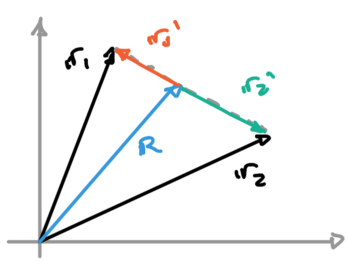
Além do movimento do CM, podemos analizar também o movimento das partículas 1 e 2 relativo ao CM. Considere, por exemplo, o seguinte problema




Duas partículas ligadas por uma mola caem juntas sob a ação da gravidade. O movimento do centro de massa será o de uma partícula pontual de massa $M = m_1 + m_2$, caindo verticalmente. Nada muito interessante. Internamente, no entanto, as partículas estarão oscilando.

Para descrever estas oscilações é interessante medi-las a partir da posição do CM, já que isso representa o quanto a mola está sendo esticada.

A coordenada de cada partícula relativa ao centro de massa, será




$$r_1' = r_1 - R$$
$$r_2' = r_2 - R \qquad (16)$$

Usando a Eq. (11) obtemos

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \left(\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{r}_1 (m_1 + m_2) - m_1 \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

A conta para $\mathbf{r}_2'$ é idêntica; basta trocar $1 \leftrightarrow 2$. Portanto

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$
$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \qquad (17)$$

Ou seja, ambos dependem apenas da distância $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. No entanto, quando as massas não são iguais, os pesos que aparecem na frente serão diferentes. De fato

"Nunca dividirás por um vetor."

$$\mathbf{r}_2' = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}_1' \qquad (18)$$

Ou seja, $|\mathbf{r}_2'|$ será maior (menor) que $|\mathbf{r}_1'|$ por um fator $m_1/m_2$.

Segue desse resultado também que

$$m_1 \mathbf{r}_1' + m_2 \mathbf{r}_2' = 0 \qquad (19)$$

Derivando com relação ao tempo chegamos a

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1'}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2'}{dt} = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0 \qquad (20)$$

Ou seja, o momento total relativo ao CM é nulo. Isso ocorre pois o momento total está relacionado com o movimento do CM, de tal forma que o momento relativo ao CM é nulo.

Voltando para a Eq. (17), é importante ter em mente que quando descrevemos as coordenadas em relação ao CM, estamos em geral usando um referencial não inercial. Isso ocorre sempre que $\mathbf{F}^{ext} \neq 0$, o que causa o movimento do CM ser acelerado.

## Exemplos:

- atrito c/ chão
  2 molas
- projétil.
- granada

### 1) Recuo de um canhão

Considere um canhão de massa $m_1$ que atira um projétil de massa $m_2$. O que faz o projétil ser atirado é a energia química da explosão. A energia, portanto, não é conservada (ela aumenta). As forças relacionadas à explosão, no entanto, são forças internas. Não há nenhuma força externa ajudando o canhão a atirar. Consequentemente, o momento total será uma constante do movimento

$$\frac{dP}{dt} = 0 \rightsquigarrow P_{\text{antes do tiro}} = P_{\text{depois do tiro}}$$

Antes o sistema canhão - bala estava em repouso e portanto $P = 0$. Ou seja, as velocidades do canhão e da bola após o tiro serão relacionadas por

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

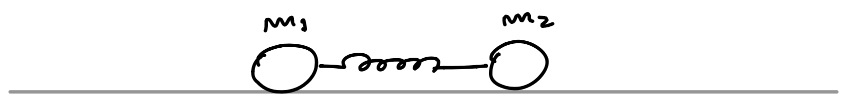
ou seja

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

O canhão recua, portanto, com uma velocidade proporcional à velocidade da bala e também à razão das massas $m_2/m_1$. Teste de sanidade, se $m_1 \gg m_2$ então $v_1 \approx 0$.

## 2) Massa mola

Considere duas massas ligadas por uma mola




Suponha que comprimimos um pouco a mola e depois soltamos. Se desprezamos o atrito então não haverão forças externas atuando sobre o sistema. Consequentemente

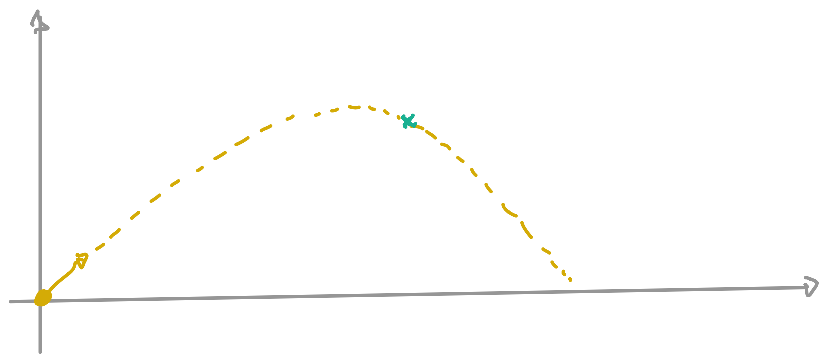
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

A partícula mais leve vai oscilar mais rápido. No entanto o centro de massa permanece no repouso pois não há forças externas.

## 3) Granada

Suponha que arremessamos uma granada que explode no meio do ar.



A explosão só envolve forças internas. Portanto o movimento do CM não será afetado. Não importanta em quantos fragmentos a granada se quebra. E não importa para qual direção esses fragmentos saem voando. O CM se mantém no movimento parabólico original.

## Generalização para um sistema de N partículas

É fácil generalizar todo que a gente fez para um sistema com N ao invez de duas partículas. A 2ª lei para cada partícula lê-se

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{i(j)} + \mathbf{F}_i^{ext} \qquad i = 1, \dots, N \qquad (21)$$

Esse tipo de notação é muito usado em física, então é bom se acostumar: como temos N partículas, onde N é arbitrário, escrevemos todas as equações juntas usando o índice $i$ que vai de 1 a N. No lado direito temos a força externa $\mathbf{F}_i^{ext}$ e a soma de todas as forças internas. A notação $\sum_{j\neq i}$ significa somar sobre todos os índices $j$, exceto $i$. Usamos isso pois $\mathbf{F}_{i(j)}$ é a força que $j$ exerce em $i$ e $i$ não exerce uma força em si mesmo. Então, por exemplo, se

$$N = 4, \quad i = 2: \qquad \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{i(j)} = \mathbf{F}_{2(1)} + \mathbf{F}_{2(3)} + \mathbf{F}_{2(4)}$$

O momento total é

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \qquad (22)$$

A princípio eu devia escrever $\sum_{i=1}^{N}$. Mas quando isso está claro do contexto, é comum escrevermos só $\sum_i$.

As forças internas $\mathbb{F}_{i(j)}$ satisfazem, devido à 3ª lei

$$\mathbb{F}_{i(j)} = - \mathbb{F}_{j(i)} \qquad i,j = 1, \dots, N \qquad (23)$$

Por causa disso, se usarmos a Eq. (16) em (17) as contribuições das forças internas vão se cancelar. Vejamos isso com um exemplo. Se $N = 3$ teremos

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{dt} = \mathbb{F}_{1(2)} + \mathbb{F}_{1(3)} + \mathbb{F}_1^{ext}$$

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{dt} = \mathbb{F}_{2(1)} + \mathbb{F}_{2(3)} + \mathbb{F}_2^{ext}$$

$$\frac{d\mathbb{P}_3}{dt} = \mathbb{F}_{3(1)} + \mathbb{F}_{3(2)} + \mathbb{F}_3^{ext}$$

$$+$$

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \mathbb{F}_1^{ext} + \mathbb{F}_2^{ext} + \mathbb{F}_3^{ext}$$

As forças vão se cancelar em pares (com as cores correspondentes). Isso vai continuar ocorrendo para qualquer N. Ou seja

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \mathbb{F}^{ext} = \sum_i \mathbb{F}_i^{ext} \qquad (24)$$

É tudo igualzinho ao caso de duas partículas que tínhamos antes. A única diferença é que aparece aqui uma soma

Definimos a posição do CM da mesma forma que em (8):

$$\mathbf{P} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \qquad (25)$$

onde

$$M = \sum_i m_i \qquad (26)$$

é a massa total. Como também temos $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$, chegamos no análogo da Eq. (11):

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \qquad (27)$$

Finalmente, definimos as coordenadas relativas como

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \qquad (28)$$

Derivando com relação a $t$ obtemos

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} = \underbrace{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}_{\mathbf{P}} - \underbrace{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{R}}{dt}}_{\frac{d\mathbf{R}}{dt}\left(\sum_i m_i\right) = M\frac{d\mathbf{R}}{dt}}$$

ou seja

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} = \mathbf{P} - M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = 0 \qquad (29)$$

pela Eq. (25). Isso generaliza a Eq. (20): o momento total relativo ao CM é nulo.