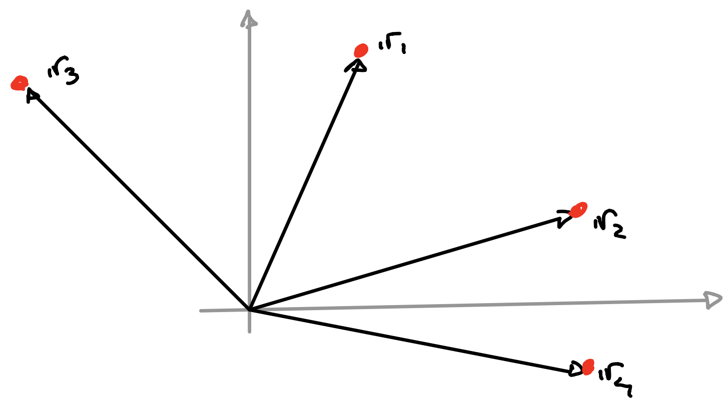
Centro de massa para um sistema de N partículas

Considere um sistema com N partículas, cada uma com massa m_i e posição $\mathbf{r}_i$, $i = 1, \dots, N$.



O centro de massa deste sistema é definido como

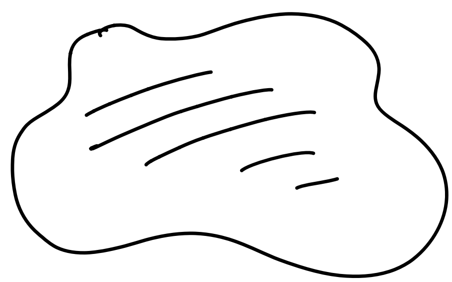
$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \tag{1}$$

onde

$$M = m_1 + \dots + m_N$$

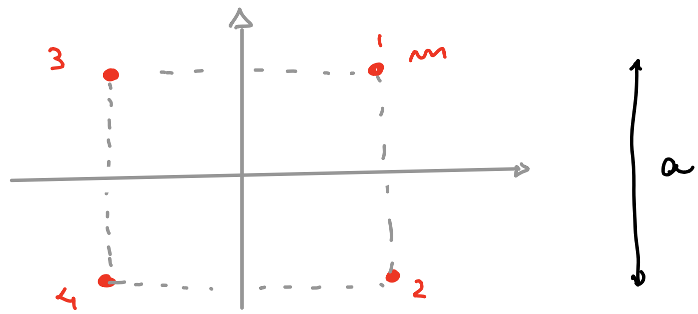
é a massa total. Essa equação se refere a um dado instante de tempo. Em geral os $\mathbf{r}_i(t)$ vão se mover no tempo e $\mathbf{R}(t)$ também. Ou seja, o CM não precisa estar parado.

A Eq. (1) presume que o sistema é composto de massas pontuais. Mas o CM pode ser definido também para um corpo contínuo.



Basta pensarmos que esse corpo é formado (como de fato é) por um número gigante de partículas pontuais (os átomos). Veremos mais adiante técnicas para calcular o CM nessas situações.

Nessa aula estudaremos como calcular o CM em diferentes configurações. Um truque muito útil para isso é explorar a simetria do problema. Considere, por exemplo, a seguinte situação:



As partículas tem todas a mesma massa e estão dispostas simetricamente ao longo de um cubo. Esse problema tem portanto uma enorme simetria. Para cada $\mathbf{r}_i$ tem uma outra partícula com mesma massa e posição $-\mathbf{r}_i$. Portanto, por simetria temos que ter

$$\mathbf{R} = 0 \tag{2}$$

Vamos ver que isso de fato ocorre. Seja "a" a aresta do cubo. Então

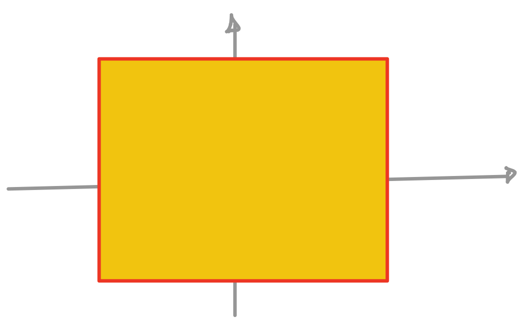
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (a/2)\hat{i} + (a/2)\hat{j} \\ \mathbf{r}_2 &= (a/2)\hat{i} - (a/2)\hat{j} \\ \mathbf{r}_3 &= -(a/2)\hat{i} + (a/2)\hat{j} \\ \mathbf{r}_4 &= -(a/2)\hat{i} - (a/2)\hat{j} \end{aligned} \tag{3}$$

Inserindo isso em (1) vemos que, como $m_i = m$,

$$R = \frac{m}{4m} \left(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \right) \qquad (4)$$

Mas somando os vetores em (3) tudo se cancela e portanto $R = 0$, como esperado. Note como foi essencial não só as posições das partículas, mas também o fato de todas terem a mesma massa.

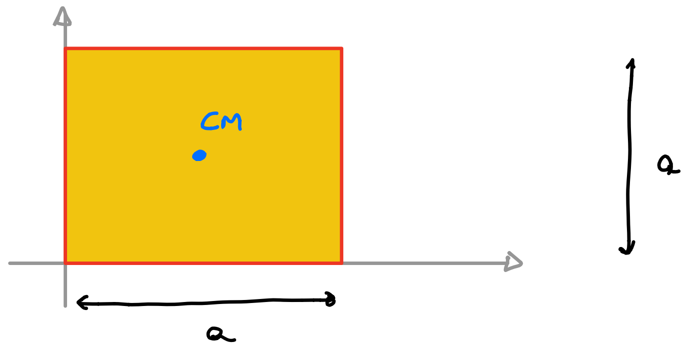
Ex: considere um bloco maciço de aço, cortado na forma de um quadrado



Ainda não aprendemos como calcular o CM nesses casos. Mas usando apenas argumentos de simetria podemos nos antecipar e dizer que

$$R = 0$$

Note que "$\mathbb{R} = 0$" é uma consequência da minha escolha de sistema de coordenadas. Por exemplo, se tivéssemos escolhido



então o CM seria no centro do quadrado:

$$\mathbb{R} = (a/2)\,\hat{i} + (a/2)\,\hat{j} \qquad (5)$$

Divide and conquer

Uma propriedade muito útil para o cálculo do CM é que podemos agrupar as massas em grupos, calcular o CM de cada grupo e depois combinar os grupos para calcular o CM total.

Considere, por exemplo $N = 4$ e vamos chamar (m_1, m_2) de grupo I e (m_3, m_4) de grupo II

$$\underbrace{m_1 \quad m_2}_{\mathrm{I}} \qquad \underbrace{m_3 \quad m_4}_{\mathrm{II}}$$

O CM da Eq (1) pode ser escrito como

$$M\mathbf{R} = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + m_4 \mathbf{r}_4 \tag{6}$$

Agora eu divido

$$M = \underset{\substack{\uparrow \\ m_1 + m_2}}{M_{\mathrm{I}}} + \underset{\substack{\uparrow \\ m_3 + m_4}}{M_{\mathrm{II}}} \tag{7}$$

Além disso eu defino o CM de cada grupo como sendo

$$\mathbf{R}_{\mathrm{I}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M_{\mathrm{I}}}$$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{II}} = \frac{m_3 \mathbf{r}_3 + m_4 \mathbf{r}_4}{M_{\mathrm{II}}} \tag{8}$$

Com isso a Eq. (6) se torna

$$(M_I + M_{II})\,\mathbb{R} = \underbrace{(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)}_{M_I \mathbb{R}_I} + \underbrace{(m_3 \mathbf{r}_3 + m_4 \mathbf{r}_4)}_{M_{II} \mathbb{R}_{II}}$$

$$= M_I \mathbb{R}_I + M_{II} \mathbb{R}_{II}$$

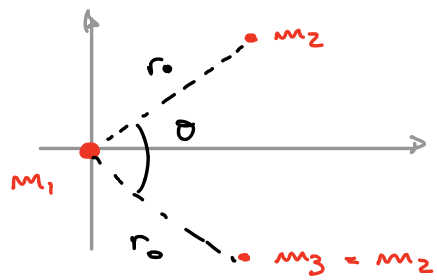
Portanto

$$\mathbb{R} = \frac{M_I \mathbb{R}_I + M_{II} \mathbb{R}_{II}}{M_I + M_{II}} \tag{9}$$

que mostra como o CM total $\mathbb{R}$ pode ser obtido do CM dos grupos I e II.

Fizemos a conta pensando em $N=4$, mas da para ver que tudo se generaliza da mesma forma para N arbitrário

Ex: H_2O



Agrupando m_2 e m_3 vemos que

$$\mathbb{R}_{23} = \frac{m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m_2}{2m_2}\, 2\, r_0 \cos(\theta/2)\, \hat{i}$$

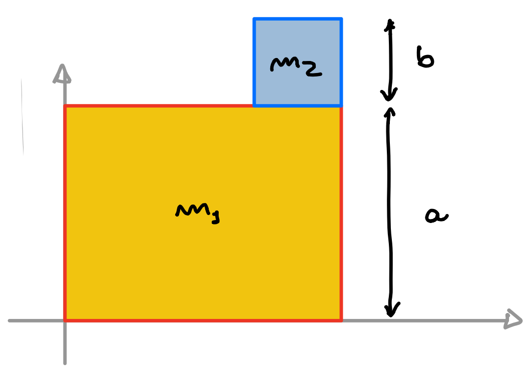
$$= r_0 \cos(\theta/2)\, \hat{i}$$

Juntando agora também m_1:

$$\mathbb{R} = \frac{m_1 \overbrace{\mathbf{r}_1}^{0} + M_{23}\, \mathbb{R}_{23}}{m_1 + \underbrace{M_{23}}_{2m_2}} = \frac{2m_2\, \mathbb{R}_{23}}{m_1 + 2m_2}$$

$$= \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2}\, r_0 \cos(\theta/2)\, \hat{i}$$

Ex:



O CM do bloco m_1 foi calculado em (5) usando argumentos de simetria

$$R_1 = (a/2)\,\hat{i} + (a/2)\,\hat{j} \tag{10}$$

O CM do bloco m_2 será no centro dele também. A posição desse centro é

$$\mathbb{R}_2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)\hat{i} + \left(a + \frac{b}{2}\right)\hat{j} \qquad (11)$$

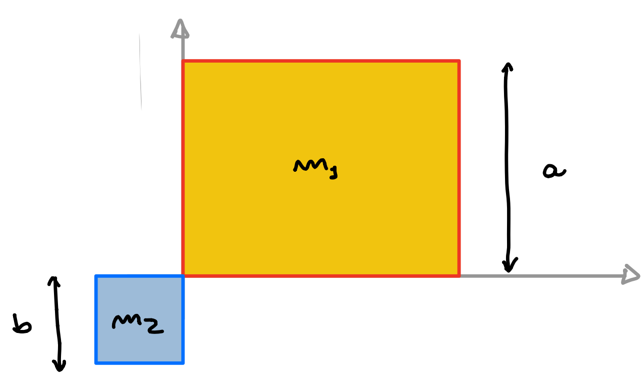
Portanto o CM será em

$$\mathbb{R} = \frac{m_1 \mathbb{R}_1 + m_2 \mathbb{R}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \left[\frac{m_1}{M}\frac{a}{2} + \frac{m_2}{M}\left(a - \frac{b}{2}\right)\right]\hat{i} + \left[\frac{m_1}{M}\frac{a}{2} + \frac{m_2}{M}\left(a + \frac{b}{2}\right)\right]\hat{j}$$

Nada muito bonito, mas fazer o que.

Ex:



Qual deve ser a massa m_2 p/ que o CM seja na origem?

$$\mathbb{R} = \frac{m_1}{M}\left[(a/2)\hat{i} + (a/2)\hat{j}\right] + \frac{m_2}{M}\left[-(b/2)\hat{i} - (b/2)\hat{j}\right]$$

$$= \frac{(m_1 a - m_2 b)}{2M}\hat{i} + \frac{(m_1 a - m_2 b)}{2M}\hat{j}$$

Portanto devemos ter

$$m_2 = \frac{a}{b} m_1 \tag{12}$$

Centro de massa de sistemas contínuos

Vimos até aqui como calcular o CM para um sistema discreto de partículas, Eq. (1):

$$M \mathbb{R} = \sum_i m_i \mathbb{r}_i \tag{13}$$

Com frequência, no entanto, estamos interessados em sistemas onde o número de átomos é tão grande que podemos tratá-lo como um contínuo.

Nesse caso cada massa m_i na Eq. (13) será muito pequena, e portanto vamos escrevê-las como dm_i:

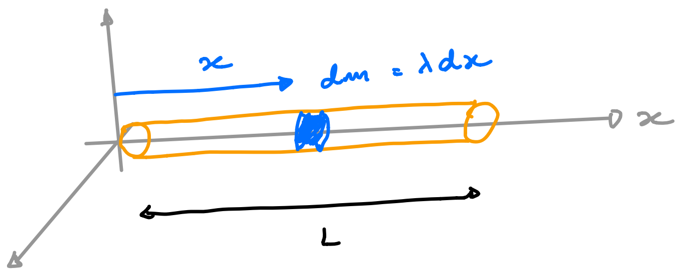
$$M \mathbb{R} = \sum_i \mathbb{r}_i \, dm_i \tag{14}$$

Além disso, o número de termos na soma será muito grande. Ou seja, estamos somando muitos termos mas cada um é muito pequeno. Podemos portanto converter a soma em uma integral

$$M \mathbb{R} = \int \mathbb{r} \, dm \tag{15}$$

Ex: bastão uniforme

Para entender como funciona a integral (15), considere o exemplo de um bastão uniforme de comprimento L e massa M:



A posição de um elemento de massa dm será $\mathbf{r} = x\hat{i}$.

Portanto a Eq. (15) se torna

$$M\mathbf{R} = \int x\hat{i}\,dm \tag{16}$$

Assumimos que o bastão tem densidade de massa uniforme. Ou seja, qualquer pedacinho do bastão terá uma massa dm proporcional ao comprimento dx. Escrevemos

$$dm = \lambda\,dx \tag{17}$$

onde

$$\lambda = \frac{M}{L} \tag{18}$$

é a densidade linear de massa (massa por unidade de comprimento).

Substituindo a (17) na (16) obtemos

$$M\mathbb{R} = \int x\hat{i}\,\lambda\,dx = \hat{i}\,\lambda\int_0^L x\,dx$$

Aqui eu coloquei também os limites de integração. A integral resultante agora é familiar

$$M\mathbb{R} = \hat{i}\,\lambda\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \hat{i}\,\lambda\,\frac{L^2}{2}$$

Substituindo $\lambda = M/L$ obtemos

$$M\mathbb{R} = \frac{\hat{i}\,M\,L}{2}$$

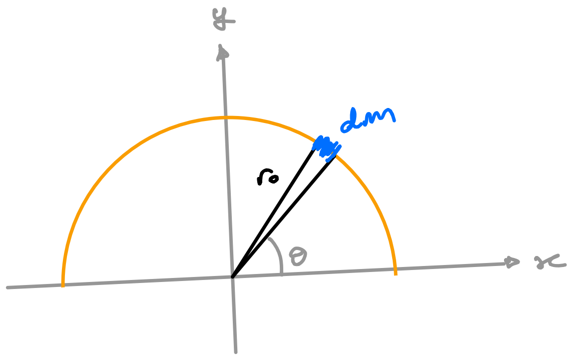
ou

$$\mathbb{R} = \frac{\hat{i}\,L}{2} \qquad (19)$$

Como já era de se esperar, o CM está exatamente no meio do bastão.

Ex: aro semi-circular

Considere agora um aro semi-circular



Nesse caso a posição do elemento de massa dm será

$$\mathbf{r} = r_0 \cos\theta\, \hat{i} + r_0 \sin\theta\, \hat{j} \qquad (20)$$

Supondo que a densidade seja uniforme, teremos nesse caso

$$dm = \lambda\, ds = \lambda\, r_0\, d\theta \qquad (21)$$

Aqui ds é o elemento de arco, tal que

$$\lambda = \frac{M}{\pi r_0} \qquad (22)$$

onde πr_0 é o comprimento total do arco.

A Eq. (15) fornece, portanto

$$M\mathbf{R} = \int_0^{\pi} \left(r_0 \cos\theta\, \hat{i} + r_0 \sin\theta\, \hat{j} \right) \lambda\, r_0\, d\theta$$

Isso se quebra em duas integrais

$$M\,\mathbb{R} = \lambda r_0^2\, \hat{i} \int_0^{\pi} \cos\theta \, d\theta + \lambda r_0^2\, \hat{j} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \qquad (23)$$

Havíamos visto em aulas anteriores que

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta \;\rightsquigarrow\; \int d\theta \sin\theta = -\cos\theta \qquad (24)$$

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \;\rightsquigarrow\; \int d\theta \cos\theta = \sin\theta$$

Portanto

$$M\,\mathbb{R} = \lambda r_0^2\, \hat{i}\, \underbrace{(\sin\theta)\Big|_0^{\pi}}_{0-0=0} + \lambda r_0^2\, \hat{j}\, \underbrace{(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}}_{-[(-1)-1]=2}$$

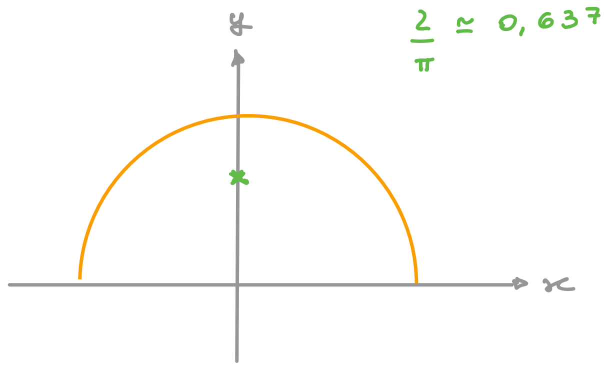
$$\therefore \quad M\,\mathbb{R} = 2\lambda r_0^2\, \hat{j}$$

Substituindo $\lambda = M/\pi r_0$ obtemos finalmente

$$M\,\mathbb{R} = \frac{2M}{\pi r_0} r_0^2\, \hat{j}$$

ou

$$\mathbb{R} = \frac{2}{\pi} r_0\, \hat{j} \qquad (25)$$



Por simetria, podíamos esperar que o CM estaria no eixo y.

Mas esse valor exato de $2r_0/\pi$ não é intuitivo. Precisamos fazer a conta para saber.