Sistemas com massa variável

Considere a Sandra Bullock flutuando no espaço na ausência de qualquer força externa. Nesse caso ela só pode se deslocar em movimento retilínio uniforme, com velocidade v. Num certo instante t a Sandra arremessa uma chave de fenda. Seja m a massa da Sandra e δm a massa da chave de fenda. O momento total do sistema Sandra + chave, antes do arremesso era

$$P = (m + \delta m)\, v \tag{1}$$

Como o arremesso não envolve nenhuma força externa, o momento total será conservado. Vamos denotar por v_{rel} a velocidade relativa com que a chave é arremessada em relação à Sandra. A velocidade da chave em si será $v + v_{rel}$ [Por exemplo, v_{rel} tem que ser na direção oposta a v para que a chave fique parada.]

O momento final será portanto

$$P = m\,(v + \Delta v) + \delta m\,(v + v_{rel}) \tag{2}$$

onde Δv é o quanto mudou a velocidade da Sandra.

Igualando (1) e (2) obtemos portanto

$$(m + \delta m) v = m(v + \Delta v) + \delta m (v + v_{rel})$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = m \Delta v + \delta m \, v_{rel}$$

Ou seja

$$m \Delta v = - \delta m \, v_{rel} \qquad (3)$$

Isso diz o quanto mudou a velocidade da Sandra em termos da velocidade v_c com que a massa foi arremessada e a variação de massa δm.

É um pouco mais comum expressarmos a (3) em termos da variação de massa da Sandra:

$$\Delta m = - \delta m \qquad (4)$$

que foi negativa pois ela perdeu massa. Com isto obtemos

$$m \Delta v = \Delta m \, v_{rel} \qquad (5)$$

Suponha agora que a Sandra substitui a chave de fenda por uma bazuka de feijão, que atira um feijão de massa Δm a cada intervalo de tempo Δt. Dividindo a Eq. (5) por Δt obtemos

$$m(t)\,\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\, v_{rel}. \tag{6}$$

Agora transformamos a bazuka de feijões numa bazuka de ar. Ou seja, algo que expele massa continuamente. Nesse caso podemos tomar o limite $\Delta t \to 0$ na Eq. (6), obtendo finalmente

$$m\,\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}\, v_{rel} \tag{7}$$

Essa é a Eq. do movimento para um sistema de massa variável. Note que $dm/dt < 0$ pois o sistema está perdendo massa. Claro, podem haver também problemas onde o sistema ganha massa.

O lado direito da Eq. (7) é chamado de empuxo. É uma espécie de força que aparece devido à massa ser variável. Se, além disso, tivermos forças externas envolvidas, basta complementarmos a Eq. (7):

$$m(t)\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}\, v_{rel} + F^{ext} \tag{8}$$

Lançamento de foguetes

Um foguete expele massa para trás para ser impulsionado para frente. Suponha que ele queima massa a uma taxa constante. Ou seja

$$m(t) = m_0 - Rt \tag{9}$$

e portanto

$$\frac{dm}{dt} = -R \tag{10}$$

A Eq. (8) se torna, portanto,

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = -R\,\vec{v}_{rel} - m(t)g\,\hat{j} \tag{11}$$

onde $\vec{v}_{rel}$ é a velocidade com que a massa é expelida com relação ao foguete. Supomos que a massa seja expelida verticalmente e para baixo, tal que $\vec{v}_{rel} = v_{rel}\,\hat{j}$ e $v_{rel} < 0$. Com isso a Eq. (11) se torna

$$m(t)\frac{dv_y}{dt} = R\,|v_{rel}| - m(t)g \tag{12}$$

Ou seja, temos uma competição entre $-mg$ puxando para baixo e $R\,|v_{rel}|$ empurrando para cima.

Vamos chamar de $v_{ex} = -v_{rel} > 0$ a "velocidade de exaustão".

Assim temos

$$m(t)\frac{dv_y}{dt} = R\, v_{ex} - m(t) g$$

Dividindo por $m(t)$:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{R}{m(t)} v_{ex} - g$$

ou

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{R}{m_0 - Rt} v_{ex} - g \qquad (13)$$

Em $t=0$, vemos que dv_y/dt será >0 quando

$$\frac{R\, v_{ex}}{m_0} > g \qquad (14)$$

Isso fornece as condições para o foguete decolar: precisamos de v_{ex} grande e R/m_0 grande (a taxa com que queimamos combustível).

A Eq. (13) é uma eq. diferencial para $v_y(t)$. Você vai aprender como resolvê-la em cálculo 3. O resultado é

$$v_y(t) = v_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - Rt}\right) - g t \qquad (14)$$

A fórmula vale apenas para tempos curtos pois

$$m(t) = m_0 - Rt$$

e o foguete só é capaz de queimar parte da sua massa.

Suponha que o 1º termo da Eq. (14) seja dominante frente o 2º. Nesse caso podemos escrever

$$v_y(t) = v_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) \qquad (15)$$

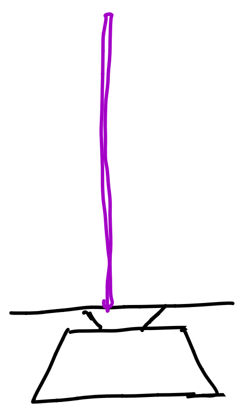
Isso relaciona a velocidade em t com a massa naquele instante.

Ou seja, se a massa de um foguete mudou de m_1 para m_2, sua velocidade terá mudado de

$$v_2 - v_1 = v_{ex} \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \qquad (16)$$

Isso fornece o ganho de velocidade que se obtém quando a massa varia.

Exemplo: Considere uma corda caindo sobre uma balança



A corda tem comprimento L e massa M.
Ela começa com a ponta encostada na balança.
Em $t=0$ ela é solta e começa a cair. Qual a medida na balança em função do tempo?

Nesse caso o nosso "sistema" é a parte da corda que está em contato com a balança.
A massa desse sistema, portanto, aumenta no tempo, começando com $m(0)=0$.

Usamos a Eq. (8). Nosso sistema está parado, portanto $v=0$. Assim chegamos a

$$m\frac{dv}{dt} = 0 = \frac{dm}{dt} v_{rel} - m(t)g\,\hat{j} + N\hat{j}$$

onde N é a força Normal exercida pela balança. Lembre-se que a leitura da balança é dada pela normal.

Para progredir precisamos portanto saber $\frac{dm}{dt}$ e v_{rel}.
Sabemos que $v_{rel} = v_{rel}\,\hat{j}$ e $v_{rel}<0$, pois o eixo y está para cima.

Cada pedacinho de corda chega com uma v_{rel} diferente.

Considere um pedacinho que começa numa altura y_0.

Como ele está em queda livre, na eq. horária será

$$y(t) = y_0 - \frac{g t^2}{2}$$

e portanto ele tocará na balança no tempo

$$t = \sqrt{2 y_0 / g}$$

Dito de outra forma, no tempo t a balança estará recebendo o pedacinho dm que começou em $y_0 = g t^2/2$. Além disso, a velocidade deste pedacinho será

$$v_{rel} = -g t$$

Precisamos também saber $\frac{dm}{dt}$. Seja dl um segmento de corda de massa dm que cai na balança no tempo dt.

Podemos escrever

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dl} \frac{dl}{dt} = -\frac{dm}{dl} v_{rel}$$

Como a corda tem densidade uniforme

$$\frac{dm}{dl} = \frac{M}{L}$$

Portanto

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{M}{L} v_{rel}$$

Nesse caso $dm/dt > 0$ pois $v_{rel} < 0$. A taxa com que a massa entra depende da velocidade relativa. Faz sentido.

A 2ª lei se torna, portanto

$$0 = -\frac{M}{L} v_{rel}^2 \hat{j} - m(t) g \hat{j} + N \hat{j}$$

o que nos fornece a normal.

$$N = m(t) g + \frac{M}{L} v_{rel}^2$$

Finalmente, podemos calcular $m(t)$, que será a fração de M que já tocou a balança no tempo t. Essa fração será simplesmente

$$m(t) = M \frac{1}{L} \frac{gt^2}{2}$$

pois $\frac{gt^2}{2}$ representa a altura total y_0 da corda que já caiu no tempo t.

A normal será, portanto

$$N = \frac{M}{L}\frac{gt^2}{2}g + \frac{M}{L}(-gt)^2$$

ou

$$N = \frac{3}{2}\frac{M}{L}(gt)^2$$

Isso vale para

$$0 < t < \sqrt{2L/g}$$

(que é quando a corda acaba).

Se $t = \sqrt{2L/g}$ obtemos

$$N = 3Mg$$

ou seja, a normal é maior que Mg por causa do impacto da corda caindo.