Teorias físicas

Teorias físicas são meio bizarras. As leis da física não são teoremas. Não é possível derivar as leis de Newton ou a teoria da relatividade. As leis da física descrevem o experimento (ou seja, a Natureza).

Por outro lado, as leis da física têm algo especial, que a maioria das outras ciências não possui: **o poder de prever novos fenômenos.** Um biólogo, por exemplo, pode construir uma teoria para explicar o comportamento de onças no Pantanal. Mas esta mesma teoria não pode ser usada para estudar a propagação do vírus da Zika.

As leis físicas não são assim. Na física buscamos **princípios fundamentais** dos quais podemos derivar uma série de resultados variados. As leis de Newton, por exemplo, explicam tanto o lançamento de um órbita dos planetas quanto a oscilação de um pêndulo.

E mais do que isso, podemos usar as leis da física para prever fenômenos nunca antes observados.

Um exemplo bacana são as ondas eletromagnéticas.
Maxwell compilou e unificou, na sua época, as leis
que descreviam a eletricidade (correntes e etc.) e
o magnetismo (imãs e etc.). Mas ao juntar as duas,
ele percebeu que haviam soluções das equações com
comportamento ondulatório. Deveriam, portanto, existir
ondas eletromagnéticas. Ele descobriu isso antes de saber-
mos que a luz era exatamente uma dessas tais ondas.
Ele descobriu as ondas eletromagnéticas pois a teoria
previu a existência dessas ondas.

Isso é até um pouco assustador e representa uma
relação de confiança que desenvolvemos com a
teoria.

Uns 3 anos atrás, eu fui contactado pelo pai de
um amigo do colégio que eu não via a anos. Ele
me disse que estava investindo num motor movido
apenas a água, e queria que eu prestasse "assessoria
científica" ao projeto (o que diabos isso signifique).
o problema é que um motor movido a água viola a
2ª lei da termodinâmica. Eu trabalho com a 2ª lei
e portanto confio nela. Eu tenho certeza absoluta, portanto,
que motores movidos a água não funcionam.

Dito todo isso, é importante ter cuidado, pois toda teoria tem um domínio de validade. As leis de Newton, por exemplo, são confiáveis na hora de construir um avião. Mas não se quisermos construir uma Millenium Falcon.

Temos que saber até onde confiar: eu confio no meu cachorro na presença de crianças, mas não se a criança estiver segurando um pedaço de picanha.

Neste curso vamos estudar a Mecânica Clássica (leis de Newton e etc.). Essa teoria funciona bem em muitas situações. Mas ela só se aplica se as velocidades não forem muito altas ou as distâncias muito pequenas.

Se as velocidades forem muito altas, precisamos da teoria da relatividade. E se as distâncias forem muito curtas, precisamos da mecânica quântica.

Sistema de coordenadas

A mecânica clássica descreve a dinâmica de partículas e objetos que interagem entre si. A principal ideia da teoria é, dado um conjunto de objetos e suas interações, prever como esses objetos vão evoluir no tempo. Por exemplo, dado dois planetas, com suas massas, raios, distâncias, etc., queremos prever como eles irão orbitar entre si.

Para descrevermos a posição de uma partícula no espaço, precisamos de 3 números, (x, y, z). O objetivo da mecânica clássica é fornecer uma maneira de calcular as trajetórias $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Ou seja, a posição da partícula em função do tempo.

Por simplicidade, eu vou começar pensando no movimento em 1D. Um exemplo de trajetória é o movimento retilíneo uniforme

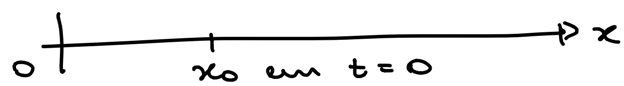
$$x(t) = x_0 + v t \tag{1}$$

Essa equação fornece x em função do tempo. Para cada t, temos um x. Nesse curso estaremos interessados em trajetórias mais complexas.

O primeiro passo para que possamos formalizar melhor a noção de trajetória é definir um referencial (ou sistema de coordenadas), com uma origem e uma orientação.

Por exemplo

Além disso, temos que definir a partir de quando começamos a contar o tempo. Por exemplo, podemos definir como $t = 0$ o instante onde a partícula está num certo ponto x_0.



Note como tudo isso já está implícito na Eq. (1). Por exemplo,

$$x(t=0) = x_0$$

Quando escrevemos uma expressão para $x(t)$, como a Eq (1), já está implícito a definição de um sistema de coordenadas.

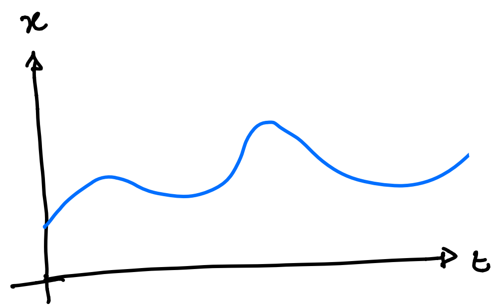
Note também como a orientação do sistema de coordenadas importa: se $v > 0$ a partícula vai se mover para a direita e se $v < 0$ para a esquerda. Isso ocorre pois escolhemos o referencial orientado para a direita

Podíamos também ter definido

Nesse caso a Eq. (1) continuaria válida, mas $v > 0$ significaria movimento para a esquerda. Isso pode ser um pouco confuso, eu sei. É mais comum, no entanto, orientar o referencial para a direita (piadas políticas a parte).

Velocidade instantânea

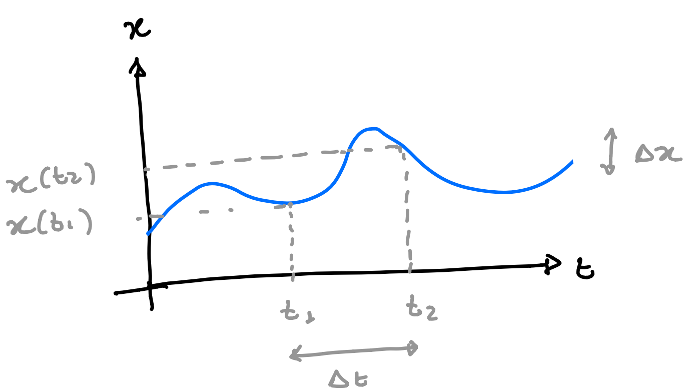
Considere uma partícula se movimentando de forma arbitrária



A velocidade média num certo intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ é definida como

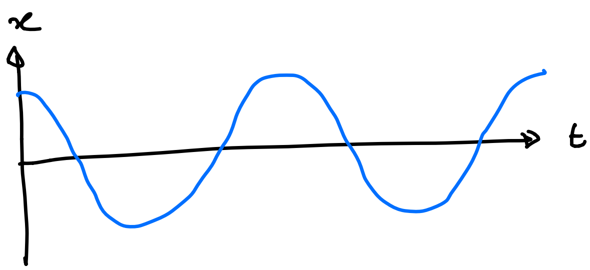
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (2)$$

Ou seja, é o quanto a partícula andou no intervalo Δt, dividido por Δt. Por exemplo

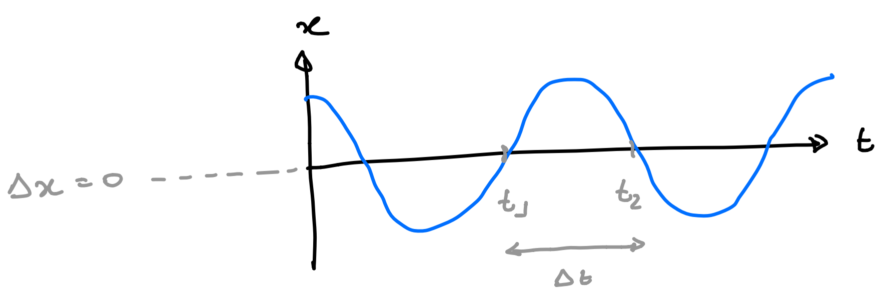


Essa idéia de velocidade média é útil para algumas coisas, mas também é muito limitada. Por exemplo, se você viajou de São Paulo para o Rio (500 km) em 5h, sua velocidade média será 100 km/h. Mas pode ser que você tenha ido rápido no começo e devagar no final. Como capturar isso?

Um outro exemplo extremo é o de uma partícula oscilando de forma periódica; e.g.



Nesse caso a velocidade média dependerá dramaticamente da escolha do intervalo Δt. Por exemplo, se escolhermos

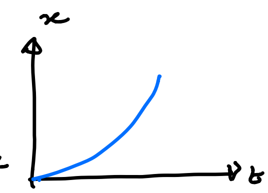


Para esse Δt, obteríamos uma velocidade média $v = 0$.

Muito mais útil é a idéia de velocidade instantânea. Ou seja, a velocidade que a partícula tem em cada instante de tempo t. Essa é a velocidade que aparece no velocímetro do seu carro.

A velocidade instantânea é definida como a velocidade média, mas tomando um intervalo Δt muito pequeno. Considere, por exemplo, uma partícula se movimentando com

$$x(t) = 2t^2$$



Suponha que queremos a velocidade no instante $t = 1\,s$. Vamos considerar a velocidade média entre t e $t + \Delta t$, para diferentes escolhas de Δt

$\Delta t\,(s)$	
0,2	$v = \dfrac{x(1{,}2) - x(1)}{0{,}2} = \dfrac{2 \times (1{,}2)^2 - 2 \times (1)^2}{0{,}2} = 4{,}4\ m/s$
0,1	$v = \dfrac{x(1{,}1) - x(1)}{0{,}1} = 4{,}2\ m/s$
0,05	$v = \dfrac{x(1{,}05) - x(1)}{0{,}05} = 4{,}1\ m/s$
0,01	$v = \dfrac{x(1{,}01) - x(1)}{0{,}01} = 4{,}02\ m/s$
0,001	$v = \dfrac{x(1{,}001) - x(1)}{0{,}001} = 4{,}002\ m/s$

Cada vez que diminuímos Δt, a diferença $x(t+\Delta t)-x(t)$ se torna menor. Mas dividimos por Δt então as coisas meio que se compensam. Claramente da para ver que se continuarmos diminuindo Δt vamos eventualmente obter

$$v(t=1) = 4 \text{ m/s}$$

Ou seja, a velocidade instantânea da partícula em $t=1s$ é 4 m/s.

É legal notar também como isso não depende da forma como escolhemos o intervalo. Por exemplo, suponha que usamos um intervalo do tipo $t-\Delta t$ até t (o tamanho continua sendo Δt). Nesse caso obtemos

$\Delta t (s)$	
0,2	$v = \dfrac{x(1)-x(0,8)}{0,2} = 3,6 \text{ m/s}$
0,1	$v = \dfrac{x(1)-x(0,9)}{0,1} = 3,8 \text{ m/s}$
0,05	$v = \dfrac{x(1)-x(0,95)}{0,05} = 3,9 \text{ m/s}$
0,01	$v = \dfrac{x(1)-x(0,99)}{0,01} = 3,98 \text{ m/s}$
0,001	$v = \dfrac{x(1)-x(0,999)}{0,001} = 3.998 \text{ m/s}$

Os valores são diferentes. Mas no limite de Δt indo a zero, obtemos novamente $v = 4$ m/s.

A velocidade instantânea depende apenas do tempo t, e não do intervalo Δt.

Podemos formalizar melhor a conta acima. Continuamos pensando em $x(t) = 2t^2$. Então

$$x(t+\Delta t) = 2(t+\Delta t)^2$$
$$= 2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)$$

Portanto

$$x(t+\Delta t) - x(t) = 2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 2t^2$$
$$= 4t\Delta t + 2\Delta t^2$$

A velocidade média será, portanto,

$$v = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{4t\Delta t + 2\Delta t^2}{\Delta t}$$

ou

$$v = 4t + 2\Delta t$$

Essa fórmula vale para qualquer Δt. Mas se agora tomamos Δt muito pequeno, o 2º termo se torna desprezível e obtemos

$$v = 4t \quad \text{quando} \quad \Delta t \to 0$$

Essa conta mostra também como o fator de 2 em $x = 2t^2$ é simplesmente carregado o tempo todo. Se tivermos algo como $x(t) = \lambda t^2$, onde λ é uma constante, então

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \lambda (t+\Delta t)^2 - \lambda t^2$$
$$= 2\lambda t \, \Delta t + \lambda \Delta t^2$$

Portanto

$$v = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 2\lambda t + \lambda \Delta t^2$$

e, quando Δt é muito pequeno,

$$v(t) = 2\lambda t$$

A constante λ foi só carregada. O importante é que a velocidade associada a t^2 será $2t$

$$\text{se} \quad x = t^2 \qquad \text{então} \qquad v = 2t$$

Ou seja, a velocidade instantânea em qualquer tempo t é $4t$. Em $t = 1$ temos $v = 4\,m/s$. Em $t = 10$ temos $v = 40\,m/s$.

Isso faz sentido: $x = 2t^2$ é um movimento acelerado e portanto quanto mais o tempo passa, maior a velocidade.

Podemos comparar isso com o movimento uniforme,

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

Nesse caso

$$x(t+\Delta t) = x_0 + v_0 (t + \Delta t)$$

então

$$x(t+\Delta t) - x(t) = v_0 \Delta t$$

e portanto

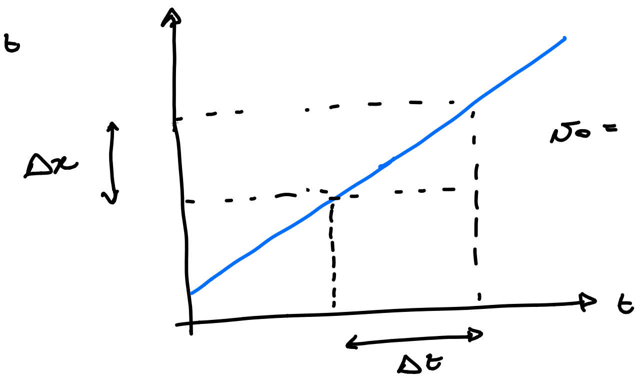
$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v_0$$

O movimento uniforme é especial pois $v(t)$ não depende de t: a velocidade é constante.

Note também como a constante x_0 some da expressão final.

A velocidade instantânea representa a reta tangente a $x(t)$ no ponto t. No caso do movimento uniforme, temos

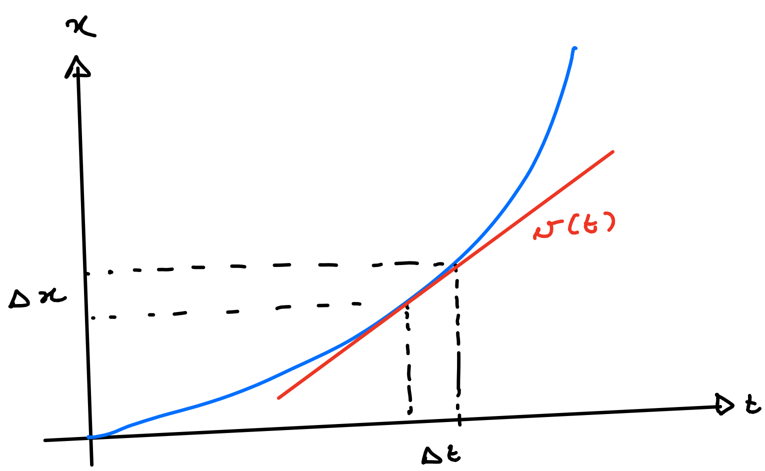
$x = x_0 + v_0 t$



$v_0 = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Ou seja, nesse caso a curva é uma reta com inclinação v_0. Mas mesmo quando $x(t)$ não é linear, ainda podemos definir uma reta tangente a cada ponto:

$x = 2t^2$



Mas agora, com as idéias acima, temos uma ferramenta muito poderosa em mãos. Por exemplo, considere

$$x(t) = \alpha t^3$$

onde α é uma constante (qual a unidade de α?). Nesse caso

$$x(t+\Delta t) = \alpha(t+\Delta t)^3$$
$$= \alpha\left(t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3\right)$$

Então

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \alpha\left(3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3\right)$$

e portanto

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 3\alpha t^2 + 3\alpha t\Delta t + \alpha\Delta t^2$$

Dos 3 termos, só o 1º não depende de Δt. Os outros dois se tornam desprezíveis quando $\Delta t \to 0$. Portanto, concluímos que

$$v = 3\alpha t^2$$

A velocidade instantânea depende, portanto, de t^2.

Podemos também checar que a definição de v não depende de como escolhemos Δt. Considere novamente

$$x = 2t^2$$

Já sabemos que $v = 4t$ quando usamos um intervalo $[t, t+\Delta t]$. Por outro lado, se usamos $[t-\Delta t, t]$ obtemos

$$x(t) - x(t-\Delta t) = 2t^2 - 2(t-\Delta t)^2$$
$$= 2t^2 - 2(t^2 - 2t\Delta t + \Delta t^2)$$
$$= 4t\Delta t - 2\Delta t^2$$

Portanto

$$\frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} = 4t - 2\Delta t$$

Quando $\Delta t \to 0$ o último termo morre e obtemos novamente

$v = 4t$.

O conceito de derivada

O procedimento que utilizamos para calcular $v(t)$ é chamado de derivada. Dizemos que $v(t)$ é a derivada de $x(t)$ com relação a t e resumimos isso através da seguinte notação:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad (3)$$

O que essa notação significa é nada mais do que fizemos acima. Ou seja, primeiro calculamos $x(t+\Delta t) - x(t)$, depois dividimos por Δt e finalmente tomamos Δt como sendo muito muito pequeno. É isso que "$\lim_{\Delta t \to 0}$" significa. Ou seja, tomamos o limite de Δt indo a zero.

A notação $\frac{dx}{dt}$ é somente o símbolo que usamos para derivadas. A ideia é que seja algo parecido com $\Delta x / \Delta t$. Mas usamos dx e dt para enfatizar que é o "delta" de algo infinitesimal.

Você deve enxergar a derivada como um operador. Ou seja, é algo que atua (opera) numa função para produzir outra função. Entra $x(t)$, sai dx/dt

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow \frac{dx}{dt}$$

Alguns exemplos que vimos acima:

$$\lambda t^2 \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow 2\lambda t$$

$$x_0 + v_0 t \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow v_0$$

$$\alpha t^3 \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow 3\alpha t^2$$

Podemos também resumir como é a aplicação de d/dt em algumas potências de t:

$$\frac{d}{dt}(1) = 0 \qquad \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$$

$$\frac{d}{dt}(t) = 1 \qquad \frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2$$

Você talvez já tenha notado um padrão. Realmente, o que acontece é

$$\frac{d}{dt}(t^n) = n\,t^{n-1}$$

Demonstraremos isso na próxima aula.

Quando lidamos com derivadas, as seguintes propriedades são úteis:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d}{dt}[c\,x(t)] = c\,\frac{dx}{dt}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{d}{dt}[x_1(t) + x_2(t)] = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}$$

Da propriedade (I) temos, por exemplo,

$$\frac{d}{dt}(t^2) = 2t \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt}(\lambda t^2) = \lambda\frac{d}{dt}(t^2) = 2\lambda t$$

ou

$$\frac{d}{dt}(v_0 t) = v_0 \frac{d}{dt}(t) = v_0$$

e assim por diante.

Já da prop. (II) temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0 t\right) &= \frac{d}{dt}(x_0) + \frac{d}{dt}(v_0 t)\\ &= 0 + v_0\frac{d}{dt}(t)\\ &= v_0\end{aligned}$$

Ex: Considere

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2} + \frac{\alpha t^3}{3}$$

Usando (I) e (II), além do que já sabemos sobre as derivadas de t, t^2 e t^3, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x_0)}{dt} + v_0 \frac{d}{dt}(t) + \frac{a}{2}\frac{d}{dt}(t^2) + \frac{\alpha}{3}\frac{d}{dt}(t^3)$$

$$= 0 + v_0 + a t + 3 \alpha t^2$$

$\therefore$

$$\frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2} + \frac{\alpha t^3}{3} \right) = v_0 + a t + 3 \alpha t^2$$

Aceleração

A aceleração mede o quanto a velocidade varia no tempo. Ou seja, a aceleração é a derivada da velocidade

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Como a velocidade, por sua vez, é a derivada da posição, dizemos que a aceleração é a derivada segunda da posição. Para isso usamos o seguinte símbolo

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

O símbolo $\frac{d^2}{dt^2}$ significa aplicar $\frac{d}{dt}$ duas vezes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Ex: movimento uniformemente acelerado

Considere uma partícula evoluindo como

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

A velocidade em função do tempo será

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(x_0) + v_0 \frac{d}{dt}(t) + \frac{a}{2}\frac{d}{dt}(t^2)$$

$$= 0 + v_0 + \frac{a}{2} 2t$$

$\therefore$

$$v(t) = v_0 + at$$

A aceleração, por outro lado, será

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(v_0) + a\frac{d}{dt}(t)$$

$$= 0 + a$$

ou seja

$$a(t) = a$$

O movimento é "uniformemente acelerado" pois a aceleração é uniforme 😱😱😱

Nem todo o movimento é uniformemente acelerado. Considere, por exemplo,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} + \alpha t^3$$

A velocidade será

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t + 3\alpha t^2$$

e portanto a aceleração será

$$a = \frac{dv}{dt} = a_0 + 6\alpha t$$

Nesse caso a aceleração está mudando linearmente.

Equação de Torricelli

Considere um movimento uniformemente acelerado. Tomamos um sistema de coordenadas onde a partícula está na posição x_0 no instante t_0. A equação da partícula em função do tempo será

$$x(t) = x_0 + v(t-t_0) + \frac{a(t-t_0)^2}{2}$$

É comum colocarmos $t_0 = 0$. Mas eu quero deixar $t_0 \neq 0$ pois é interessante notar como as coisas dependem da nossa escolha de origem da contagem do tempo.

Para calcular a velocidade precisamos de

$$\frac{d}{dt}(t-t_0) = \frac{d}{dt}(t) - \underbrace{\frac{d}{dt}(t_0)}_{0} = 1$$

e

$$\frac{d}{dt}(t-t_0)^2 = \frac{d}{dt}\left(t^2 - 2tt_0 + t_0^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(t^2) - 2t_0\frac{d}{dt}(t) + 0$$

$$= 2t - 2t_0$$

$$= 2(t-t_0)$$

Portanto

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} x_0 + v_0 \frac{d}{dt}(t-t_0) + \frac{a}{2}\frac{d}{dt}(t-t_0)^2$$

$$= 0 + v_0 + a(t-t_0)$$

Ou seja

$$v(t) = v_0 + a(t-t_0)$$

Teste de sanidade: $v(t_0) = v_0$.

Podemos eliminar $t-t_0$ e expressar $x(t)$ em função de $v(t)$. Para isso escrevemos

$$t - t_0 = \frac{\Delta v}{a} \qquad \Delta v = v(t) - v_0$$

e substituimos na Equação para $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + v_0 \frac{\Delta v}{a} + \frac{a}{2}\frac{\Delta v^2}{a^2}$$

$$= x_0 + \frac{1}{a}\left(v_0 \Delta v + \frac{\Delta v^2}{2} \right)$$

Podemos rearranjar a coisa estranha entre parênteses

$$v_0 \Delta v + \frac{\Delta v^2}{2} = v_0 (v - v_0) + \frac{(v - v_0)^2}{2}$$

$$= \cancel{v_0 v} - v_0^2 + \frac{v^2}{2} - \cancel{\frac{2 v_0 v}{2}} + \frac{v_0^2}{2}$$

$$= \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

Portanto,

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Rearranjando, obtemos

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

que é a Eq. de Torricelli. Não há nada profundo sobre essa fórmula. Ela é apenas um rearranjo das expressões de $x(t)$ e $v(t)$ para eliminar t. No entanto, na prática ela é bastante útil.

Exemplo

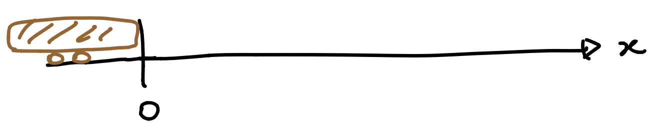
prob. 7, cap. 5, Moysés

7. O tempo médio de reação de um motorista (tempo que decorre entre perceber um perigo súbito e aplicar os freios) é da ordem de 0,7 s. Um carro com bons freios, numa estrada seca, pode ser freiado a 6 m/s^2. Calcule a distância mínima que um carro percorre depois que o motorista avista o perigo, quando ele trafega a 30 km/h, a 60 km/h e a 90 km/h. Estime a quantos comprimentos do carro corresponde cada uma das distâncias encontradas.

Dicas de sucesso:

- Sempre defina o referencial
- Use símbolos, não números. Substitua os valores só no final.

Consideramos um referencial orientado na direção em que o carro está se movendo, com a origem no ponto onde o motorista avistou o perigo.



Seja $\tau = 0{,}7\,s$ o tempo de reação, v_0 a velocidade inicial e $a = 6\,m/s^2$ a aceleração. Queremos a distância percorrida, que pode ser dividida em duas contribuições

$$d = d_1 + d_2$$

onde d_1 é a distância que o carro percorre antes do motorista reagir (ou seja, com o carro se movimentando com velocidade constante) e d_2 é a distancia que ele percorre até parar.

O movimento é decomposto em duas partes. Nos primeiros τ segundos o motorista ainda não havia reagido e portanto o carro se move com velocidade constante

$$x(t) = v_0 t \qquad 0 < t < \tau$$

Após τ segundos a distancia percorrida será

$$d_1 = x(\tau) = v_0 \tau$$

Depois disso ele passa a frear. Queremos saber qual a distância d_2 que o carro percorre até frear. Para isso podemos usar Torricelli com a velocidade final $= 0$ ("até parar"):

$$0 - v_0^2 = -2a d_2$$

onde eu usei $-a$ pois estou tomando $a > 0$ e o carro está freiando. Com isso obtemos

$$d_2 = \frac{v_0^2}{2a}$$

A distância total percorrida será

$$d = d_1 + d_2 = v_0 t + \frac{v_0^2}{2a}$$

Essa expressão depende apenas de grandezas conhecidas para.

Portanto agora é fácil substituir valores

v_0 (km/h)	v_0 (m/s)	d (m)
30	8,33	11,62
60	16,67	34,81
90	25	69,58