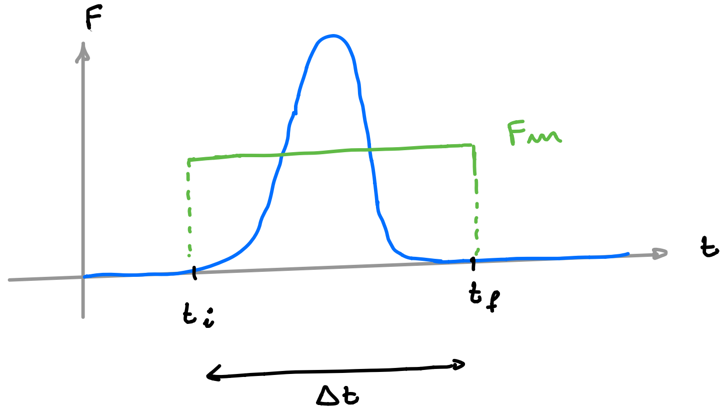
Colisões

Colisões são eventos onde dois objetos interagem de forma muito intensa mas por um tempo muito curto. Por causa disso, durante a colisão as forças externas são desprezíveis e só precisamos nos preocupar com as forças internas. Além disso, tanto antes como depois da colisão podemos assumir que a interação entre as partículas são desprezíveis. Pense, por exemplo, na colisão entre duas bolas de bilhar.

Em física usamos também a palavra "espalhamento". É a mesma coisa que colisão. O motivo é que, na realidade, dois objetos não precisam de fato se tocar para colidir. Um cometa passando perto do sol, por exemplo, é um processo de espalhamento: "antes" e "depois" é quando o cometa está muito longe do sol. E a "colisão" ocorre quando eles estão próximos e se atraem gravitacionalmente

Impulso

A força F sofrida por um objeto durante uma colisão tem a seguinte cara:



A força é praticamente nula antes e depois da colisão. Ela só será significativa durante uma janela de tempo Δt, que é onde a colisão de fato ocorre.

Nós definimos o impulso associado à força F como

$$\mathbb{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbb{F}(t)\,dt \qquad (1)$$

Ou seja, o impulso é a área sobre a curva de $\mathbb{F}(t)$ vs. t.

Da 2ª Lei temos que $\mathbb{F} = \frac{d\mathbb{p}}{dt}$. Portanto

$$\mathbb{I} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\mathbb{p}}{dt}\,dt = \int_{t_i}^{t_f} d\mathbb{p} = \mathbb{p}(t_f) - \mathbb{p}(t_i) \qquad (2)$$

ou seja

$$\mathbb{I} = \Delta \mathbb{p} \qquad (3)$$

O impulso fornece a variação no momento da partícula.

A força específica de $\mathbb{F}(t)$ é muito difícil de se determinar na prática. Pense, por exemplo, nas forças envolvidas quando damos uma raquetada no tenis.

Já $\Delta \mathbb{p}$ é algo mais facilmente mensurável. Por conta disso, é conveniente definirmos a força média

$$\mathbb{F}_m = \frac{\mathbb{I}}{\Delta t} \qquad (4)$$

que fornece uma estimativa da força envolvida na colisão.

Exemplo: teste com cinto de segurança

Considere um carro que colide com uma parede a $25\,m/s$, dentro do qual há um boneco de $80kg$. Qual a força média exercida pelo cinto de segurança?

Depois da colisão o carro e o boneco param completamente. Portanto a variação de momento do boneco será

$$\Delta p = 0 - m v_i = -(2000\ N \cdot s)\,\hat{i}$$

Pela (3), esse será o impulso produzido.

Para calcularmos a força média, Eq. (4), precisamos saber Δt. Ou seja, quanto tempo durou a colisão. Quanto maior for Δt, menor será a força média. Esse é um dos motivos pelo qual os carros hoje em dia são mais "moles". Antigamente a carcaça dos carros era feita de um material muito duro. Mas isso faz com que a colisão seja muito rápido. Usar materiais mais moles extende um pouco o intervalo da colisão.

Um valor típico é $\Delta t = 0.05$ s. Isso fornece uma força média

$$F_m = \frac{2000}{0.05} = 40\,000 \text{ N}$$

e portanto uma aceleração média

$$a_m = \frac{F_m}{m} = \frac{40000}{80} = 500 \text{ m/s}^2$$

ou

$$a_m \simeq 50 g$$

É uma aceleração altíssima. Se conseguimos aumentar Δt para 0.1 s, isso já cai para 25 g. É uma redução considerável.

Colisões perfeitamente inelásticas em 1D

Considere duas partículas de massa m_1 e m_2 se movendo na mesma linha com velocidades v_{1i} e v_{2i}.

Se $v_{1i} > v_{2i}$ as partículas vão colidir. O processo de colisão só envolve forças internas, portanto o momento será conservado:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{5}$$

Para determinarmos v_{1f} e v_{2f} a partir de v_{1i} e v_{2i}, precisamos de uma outra relação.

Definimos uma colisão com perfeitamente inelástica quando as duas partículas grudam uma na outra. Nesse caso

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f \tag{6}$$

que é também a velocidade do centro de massa. Com isso a Eq. (5) se torna

$$(m_1 + m_2) v_f = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

a

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad (7)$$

Como um caso particular, se $v_{2i} = 0$, obtemos

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} < v_{1i} \qquad (8)$$

Ou seja, o sistema perde velocidade depois da colisão. Olhamos também para a energia cinética. Antes da colisão tínhamos

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

e depois

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_f^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \frac{(m_1 v_{1i})^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

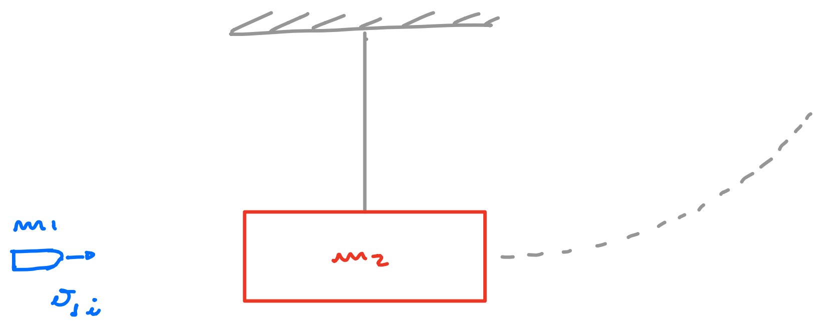
ou seja

$$K_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} K_i < K_i \qquad (9)$$

Na colisão puramente inelástica, perdemos portanto energia cinética, que foi dissipada na forma de calor.

Ex: pêndulo balístico

Considere uma bala que atinge um bloco de madeira pendurado no teto:



Medindo a altura que o bloco sobe, podemos calcular a velocidade da bala.

A velocidade final do sistema bala + bloco será dada pela Eq. (8):

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \qquad (10)$$

Depois da colisão, o sistema passa a subir, um processo que é conservativo. Portanto

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = (m_1 + m_2) g h$$

ou seja

$$v_f = \sqrt{2gh} \qquad (11)$$

Igualando (10) e (11) podemos relacionar v_{si} com h:

$$v_{si} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v_f = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \sqrt{2gh} \qquad (12)$$

É assim que se media a velocidade de projéteis antes dos radares e câmeras de alta resolução.

Colisões elásticas em 1D

Um outro tipo de colisão importante são as elásticas, onde a energia cinética é preservada:

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = K_f \tag{13}$$

Nenhuma colisão é perfeitamente elásticas, mas algumas chegam perto. Isso é mais comum no mundo microscópico: a colisão entre dois átomos é quase perfeitamente elástica.

Juntando (13) com (5), temos duas equações para duas incógnitas:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{14a}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{14b}$$

Para resolvê-las, é conveniente escrever a (14b) como

$$m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) = - m_1 (v_{1f}^2 - v_{1i}^2) \tag{15}$$

Agora usamos a identidade

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \tag{16}$$

que nos leva a

$$m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) = - m_1 (v_{1f} - v_{1i})(v_{1f} + v_{1i}) \tag{17}$$

Por outro lado, da (14a) temos

$$m_2 (v_{2f} - v_{2i}) = - m_1 (v_{1f} - v_{1i}) \tag{18}$$

Podemos então dividir a (17) pela (18). A única coisa que sobra é

$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1f} + v_{1i} \tag{19}$$

Ou seja,

$$v_{2f} - v_{1f} = - (v_{2i} - v_{1i}) \tag{20}$$

A grandeza $v_{2i} - v_{1i}$ representa a velocidade relativa com que as duas partículas se aproximam. Já a grandeza $v_{2f} - v_{1i}$ representa a velocidade relativa com que elas se afastam, depois da colisão. A Eq. (20) diz que numa colisão elástica (e só numa colisão elástica) uma é menos a outra.

As velocidades v_{1f} e v_{2f} podem agora ser mais facilmente determinadas das Eqs (14a) e (20):

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{21a}$$

$$v_{2f} - v_{1f} = - (v_{2i} - v_{1i}) \tag{21b}$$

Considere o caso particular onde $v_{2i} = 0$. As Eqs (21) se tornam

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i}$$

$$v_{2f} - v_{1f} = v_{1i}$$

Substituindo $v_{2f} = v_{1f} + v_{1i}$ na 1ª, obtemos

$$m_1 v_{1f} + m_2 (v_{1f} + v_{1i}) = m_1 v_{1i}$$

$$(m_1 + m_2) v_{1f} = (m_1 - m_2) v_{1i}$$

$$\therefore \quad v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

e

$$v_{2f} = v_{1f} + v_{1i} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1i} + (m_1 + m_2) v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Resumindo:

$v_{2i} = 0$:

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (22a)$$

$$v_{2f} = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (22b)$$

Note como $v_{2f} > 0$, ao passo que v_{1f} pode ser > 0 ou < 0 dependendo do sinal de $m_1 - m_2$. Se m_1 é mais leve que m_2, $v_{1f} < 0$; a partícula 1 é refletida para trás.

Ex: moderação de nêutrons

A reação em cadeia em um reator nuclear está baseada no fato que o urânio emite nêutrons no processo de fissão. Esses nêutrons podem ser absorvidos por outros átomos de urânio para induzir a fissão. Gera-se assim uma reação em cadeia.

O problema é que os nêutrons emitidos são rápidos, o que geraria uma reação descontrolada (ou seja, uma explosão). Para manter o reator estável, é preciso portanto desacelerá-los.

Isso é feito colocando algum outro material no caminho, em geral grafite (carbono). A velocidade final do nêutron após colidir com este outro elemento é dada pela Eq (22a):

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (23)$$

onde $m_1 = m_n$ é a massa do neutron e m_2 é a massa do outro elemento. Então, por exemplo, no caso do C teríamos $m_2 = 12 m_1$.

O quanto o nêutron desacelerou pode ser medido pela fração entre a variação da energia cinética do nêutron pela sua energia inicial

$$f = \frac{K_{1i} - K_{1f}}{K_{1i}} \qquad (24)$$

ou seja

$$f = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2}{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$

Substituindo a (23) chegamos a

$$f = \frac{v_{1i}^2 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_{1i}^2}{v_{1i}^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2) - (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2)}{(m_1 + m_2)^2}$$

ou seja

$$f = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \qquad (25)$$

Para entender esse resultado podemos colocar um m_1 em evidência:

$$m_1 + m_2 = m_1 (1 + m_2/m_1)$$

$$\hookrightarrow \quad (m_1 + m_2)^2 = [m_1 (1 + m_2/m_1)]^2$$

$$= m_1^2 (1 + m_2/m_1)^2$$

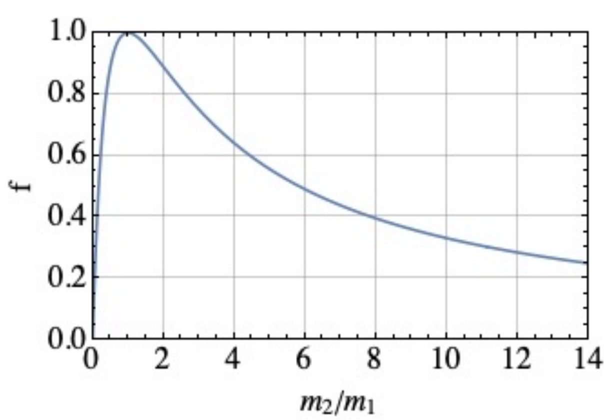
Com isso a Eq. (25) se torna

$$f = \frac{4 m_1 m_2}{m_1^2 (1 + m_2/m_1)^2}$$

ou

$$f = \frac{4 (m_2/m_1)}{(1 + m_2/m_1)^2} \qquad (26)$$

A fração da energia perdida depende apenas da razão m_2/m_1. A Eq. (26) tem a seguinte cara. Vemos que elementos mais leves são melhores para frear o nêutron. No caso do carbono, $m_2 = 12 m_1$ e obtemos $f \simeq 0,28$



Coeficiente de restituição

A maior parte das colisões não é nem elástica nem puramente inelástica, mas algo no meio do caminho. Para caracterizar isso define-se o coeficiente de restituição

$$e = -\frac{(v_{2f} - v_{1f})}{(v_{2i} - v_{1i})} \qquad (27)$$

ou seja, a razão entre as velocidades relativas de aproximação e afastamento.

Numa colisão perfeitamente inelástica $v_{2f} = v_{1f}$ e, portanto, $e = 0$. Numa colisão elástica, pela Eq. (20) temos $e = 1$. Em todos os outros casos, que chamamos simplesmente de "inelásticos", teremos $0 < e < 1$.

Colisões perfeitamente inelásticas em 3D

Em 3D a conservação do momento se da em forma vetorial:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \qquad (28)$$

No caso de colisões perfeitamente inelásticas as partículas grudam e portanto

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f$$

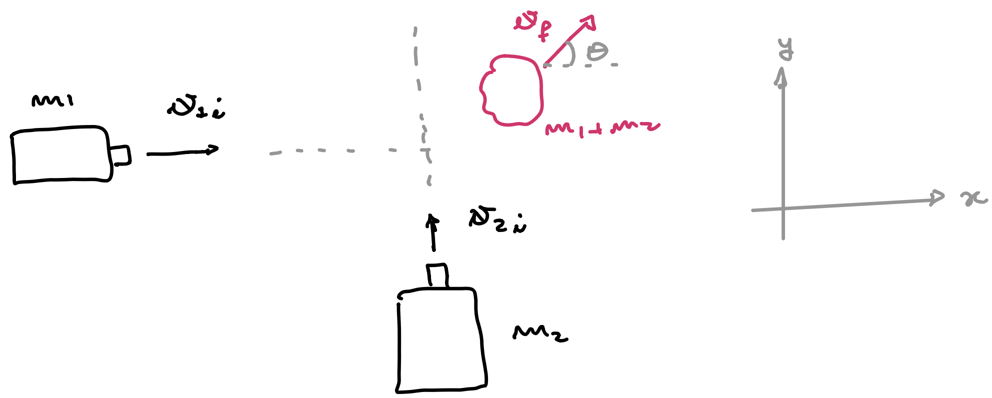
Ou seja

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad (29)$$

Note como v_f se encontra no plano formado por v_{1i} e v_{2i}. Ou seja, o processo todo na verdade é 2D

Exemplo: colisão entre dois carros

Considere dois carros colidindo a um ângulo reto



Temos, nesse caso

$$\vec{v}_f = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_{1i}\,\hat{i} + \frac{m_2}{m_1+m_2} v_{2i}\,\hat{j} \qquad (30)$$

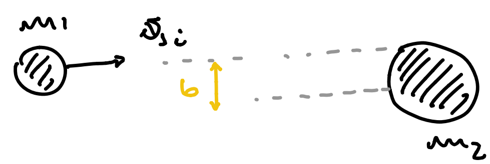
Depois da colisão os dois carros vão deslizar diagonalmente.

O ângulo θ será dado por

$$\tan\theta = \frac{m_2 v_{2i}}{m_1 v_{1i}} \qquad (31)$$

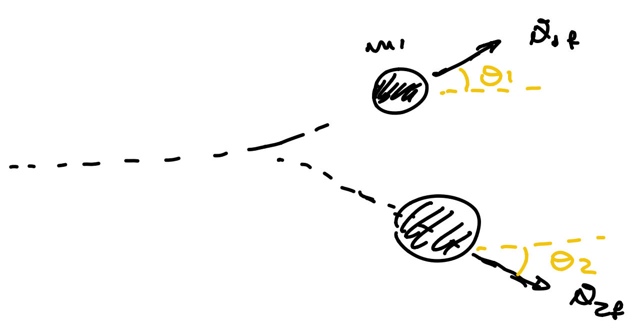
Colisões elásticas em 3D

Esse problema é mais complicado. Vamos considerar que a partícula 2 se encontra inicialmente no repouso.



A distância b é chamada de parâmetro de impacto. Se b = 0 a colisão é frontal.

Depois da colisão cada objeto vai sair para um lado, fazendo ângulos θ_1 e θ_2 com a horizontal



Conservação do momento diz que

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \tag{32}$$

Vemos dessa equação que o processo naturalmente será em 2D. Ou seja, v_{2f} estará no plano formado por v_{1i} e v_{1f}.

Olhando para as componentes x e y da Eq. (32) obtemos

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \qquad (33a)$$

$$0 = m_1 v_{1f} \,\mathrm{sen}\,\theta_1 - m_2 v_{2f} \,\mathrm{sen}\,\theta_2 \qquad (33b)$$

Além disso, temos também a conservação de energia:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad (33c)$$

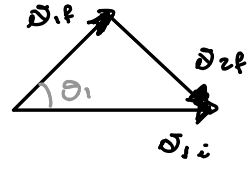
Vemos, portanto, que temos apenas 3 equações para 4 incógnitas: v_{1f}, v_{2f}, θ_1, θ_2. Para resolver o problema é necessário portanto uma quarta relação.

Essa quarta relação depende do parâmetro b e do tipo de forças envolvidas. Na prática, em geral encontramos essa quarta relação experimentalmente, medindo por exemplo um dos ângulos θ_1 ou θ_2.

Um caso particular importante é quando as massas são iguais, $m_1 = m_2 = m$. Nesse caso conservação de momento fornece

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \qquad (34)$$

o que pode ser visto como um triângulo



Além disso, conservação de energia diz que

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \qquad (35)$$

Isso nada mais é que o teorema de Pitágoras para o triângulo formado por v_{1i}, v_{1f} e v_{2f}. Ou seja, eles devem formar um triângulo retângulo.

Isso significa que no caso $m_1 = m_2$, as velocidades finais v_{1f} e v_{2f} devem ser perpendiculares entre si. Ou seja

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2 \qquad (36)$$

Da Eq. (33b) obtemos então

$$0 = v_{1f} \operatorname{sen}\theta_1 - v_{2f} \overbrace{\operatorname{sen}(\pi/2 - \theta_1)}^{\cos\theta_1}$$

Ou seja

$$v_{2f} = v_{1f} \tan\theta_1 \qquad (37)$$

Já da (33a), obtemos

$$v_{1i} = v_{1f} \cos\theta_1 + v_{2f} \overbrace{\cos(\pi/2 - \theta_1)}^{\operatorname{sen}\theta_1}$$

$$= v_{1f} \cos\theta_1 + v_{1f} \tan\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$= v_{1f} \cos\theta_1 + v_{1f} \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{\cos\theta_1}$$

$$= v_{1f} \left(\cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1\right)/\cos\theta_1$$

Como $\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 = 1$, obtemos então

$$v_{1f} = v_{1i} \cos\theta_1 \qquad (38a)$$

e, portanto

$$v_{2f} = v_{1i} \sin\theta_1 \qquad (38b)$$

O valor de θ_1 não pode ser determinado só com essas informações: ele vai depender do valor de b e das forças envolvidas.

O referencial do CM

Durante uma colisão as forças externas podem ser desprezadas. Portanto, o centro de massa vai se mover em movimento retilíneo uniforme. Na análise de colisões é conveniente usar o CM como referencial, que nesse caso será inercial.

A velocidade do CM é

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{39}$$

e ela permanece a mesma antes e depois da colisão. A velocidade relativa das partículas em relação ao CM é obtida subtraindo v_{CM}. Ou seja,

$$v_{1i}' = v_{1i} - v_{CM} \tag{40}$$
$$v_{2i}' = v_{2i} - v_{CM}$$

Substituindo (39) obtemos

$$v_{1i}' = v_{1i} - \left(\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= \frac{(m_1 + m_2) v_{1i} - m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

ou seja

$$v_{1i}' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,(v_{1i} - v_{2i}) \tag{41a}$$

Por simetria,

$$v_{2i}' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,(v_{2i} - v_{1i}) \tag{41b}$$

Vemos que no referencial do CM os momentos iniciais são iguais e opostos

$$p_{1i}' = - p_{2i}' \tag{42}$$

Ou seja, no ref. do CM as duas partículas se aproximam, uma de cada lado, com momenta iguais e opostos.

No caso de uma colisão perfeitamente inelástica, depois da colisão as partículas simplesmente ficam em repouso no referencial do CM.