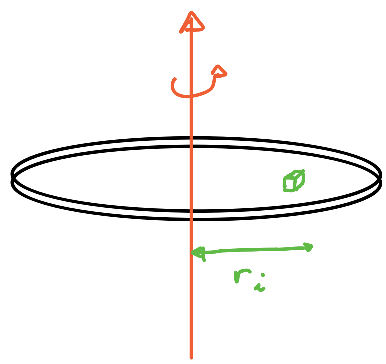
Rotações e momento de inercia

Nesta aula vamos estudar a rotação de sólidos. Pense, por exemplo, num DVD girando. O 1º ponto importante a nos atentarmos é que quando falamos de rotações, temos que definir o eixo sobre o qual estamos rodando.



Foque num pequeno pedaço do sólido. Esse pedaço estará em movimento circular com um raio r_i que é a distância entre esse ponto e o eixo de rotação.

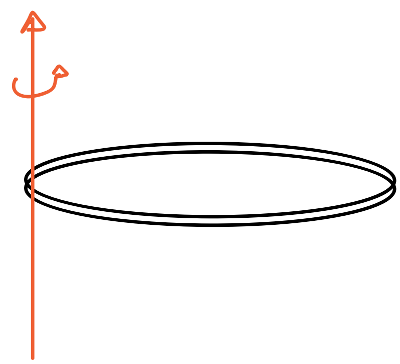
Quando o sólido roda de um ângulo $d\theta$, o arco corrido pelo nosso pequeno pedaço será

$$ds_i = r_i \, d\theta \tag{1}$$

É comum adotarmos a convenção de que $d\theta > 0$ significa uma rotação no sentido anti-horário.

É importante notar da Eq. (1) que o arco ds_i será diferente para cada pedacinho do sólido, mas o ângulo $d\theta$ é o mesmo para todos. Por exemplo, um pedaço na beira do sólido anda um ds_i maior que um próximo do eixo. Mas o ângulo que ambos rodam é o mesmo, $d\theta$.

Isso que eu estou falando não depende também da rotação ser simétrica. Ele vale sempre. Considere por exemplo



Cada pedacinho do sólido ainda vai descrever um movimento circular. Tudo que discutimos acima continua válido.

Voltemos a focar num certo ponto r_i. A velocidade tangencial desse ponto será

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} \qquad (2)$$

Como r_i é fixo, da Eq. (1) obtemos

$$v_i = r_i \frac{d\theta}{dt} := r_i \omega \qquad (3)$$

onde $\omega = d\theta/dt$ é a velocidade angular.

Como o corpo é rígido, a velocidade do pedacinho não pode ter uma componente normal; só tangencial. Se ela tivesse uma componente normal, o corpo não seria um sólido.

A energia cinética total do corpo será, portanto

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (4)$$

onde m_i é a massa do pedacinho i. Eu estou imaginando o sólido como um conjunto discreto de pedacinhos, com $\sum_i$ sendo a soma sobre todos. Já já transformaremos essa soma numa integral.

Substituindo (3) em (4) obtemos

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \qquad (5)$$

Como ω é a mesma para todos, podemos colocá-la em evidência

$$K = \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \right) \omega^2 \qquad (6)$$

A grandeza em parênteses é chamada de momento de inercia do sólido com relação ao eixo de rotação

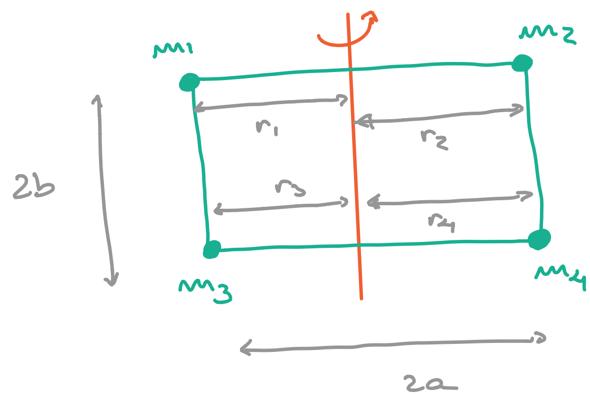
$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (7)$$

de tal forma que a energia cinética passa a ser escrita como

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (8)$$

O momento de inercia é tipo uma massa, só que para rotação. A Eq. (8) fornece, portanto, o quanto de energia tem um sólido que roda com velocidade angular ω. Como vemos, a energia é maior quão maior for o momento de inercia

Exemplo: considere o sistema abaixo, formado por 4 partículas ligadas por hastes de massa desprezível



$m_i = m.$

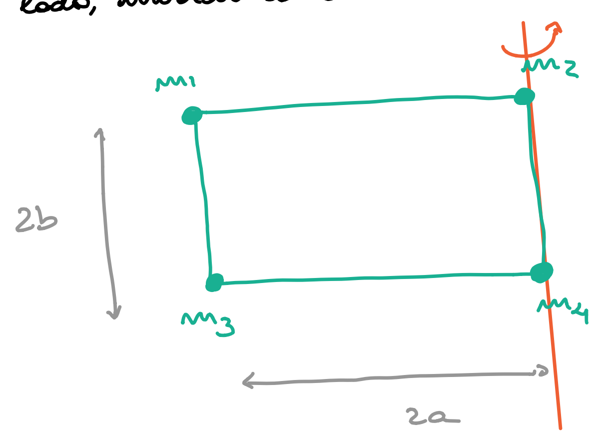
Escolhendo o eixo de rotação como na figura, teremos

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = a$$

Portanto

$$I = m r_1^2 + m r_2^2 + m r_3^2 + m r_4^2$$
$$= 4ma^2$$

Se, por outro lado, mudamos o eixo de rotação:

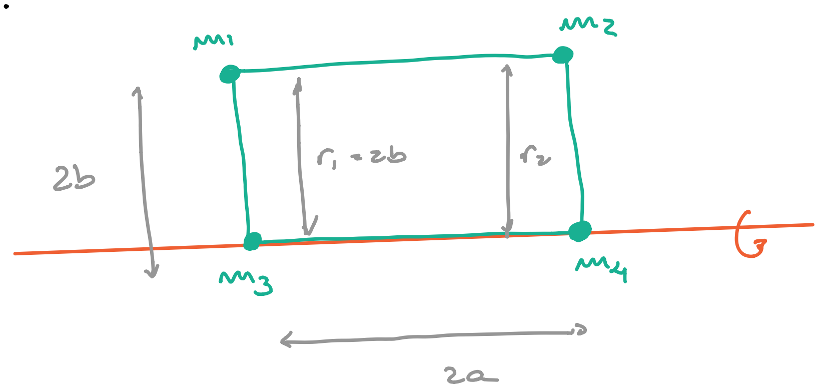


agora $\quad r_1 = r_3 = 2a \qquad r_2 = r_4 = 0$

e portanto
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$
$$= (m + m)(2a)^2$$
$$= 8ma^2$$

Nesse caso o momento de inércia é maior, apesar das massas 2 e 4 nem participarem da rotação.

Podemos também escolher um eixo de rotação em outra direção:



Nesse caso
$$r_1 = r_2 = 2b, \qquad r_3 = r_4 = 0$$

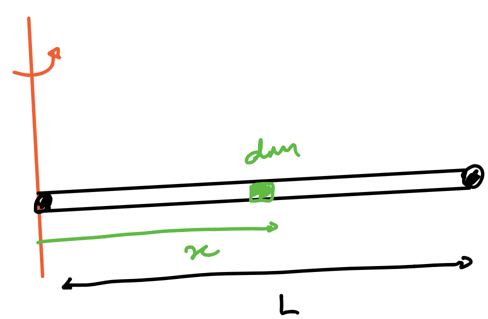
e portanto
$$I = (m + m)(2b)^2 = 8b^2.$$

Cálculo do momento de inercia

No caso de um sólido, cada massa m_i será um elemento infinitesimal dm_i. Podemos, portanto, substituir a soma em (7) por uma integral

$$I = \int r^2 dm \qquad (9)$$

Ex 1: bastão fino de comprimento L e massa M



A posição do elemento dm com relação ao eixo será x. Além disso, assim como nos cálculos do centro de massa

$$dm = \lambda\, dx = \frac{M}{L} dx$$

onde $\lambda = M/L$ é a densidade linear de massa. A Eq. (9) fornece, portanto

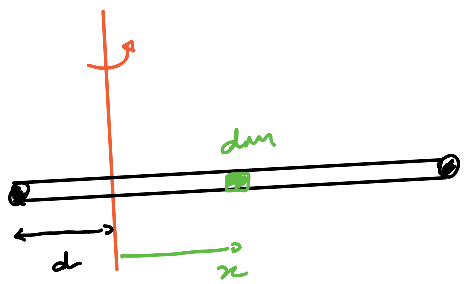
$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx$$

calculando a integral,

$$I = \frac{M}{L}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^L = \frac{M}{L}\,\frac{L^3}{3}$$

$$\therefore \qquad I = \frac{1}{3}ML^2 \qquad \text{(eixo na borda)} \qquad (10)$$

Considere agora o caso onde o eixo está numa posição arbitrária do bastão



Nesse caso a única coisa que muda são os limites de integração. Agora x vai de $-d$ até $L-d$:

$$I = \int_{-d}^{L-d} x^2\,\frac{M}{L}\,dx = \frac{M}{L}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-d}^{L-d}$$

$$= \frac{M}{3L}\left[(L-d)^3 + d^3\right]$$

$$= \frac{M}{3L}\left[L^3 - 3L^2d + 3Ld^2 - d^3 + d^3\right]$$

$$= \frac{M}{3}\left(L^2 - 3Ld + 3d^2\right)$$

$$\therefore \qquad I = \frac{M}{3}\left(L^2 - 3Ld + 3d^2\right)$$

Isso também pode ser escrito como

$$I = \frac{ML^3}{3} + M\left(d^2 - Ld\right)$$

ou

$$I = \frac{ML^3}{3} + Md\,(d - L) \qquad (11)$$

Teste de sanidade: se $d = 0$ obtemos a Eq. (11). Por outro lado, se $d = L/2$ obtemos

$$L^2 - 3L\left(\frac{L}{2}\right) + 3\left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 - \frac{3}{2}L^2 + \frac{3}{4}L^2$$

$$= L^2\left(\frac{4}{4} - \frac{6}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

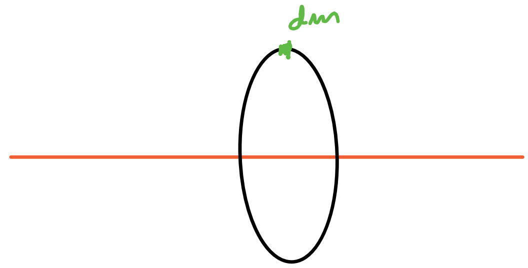
$$= \frac{L^2}{4}$$

Portanto

$$I = \frac{ML^2}{12} \qquad \text{(eixo no centro)} \qquad (12)$$

O momento de inercia é maior quando escolhemos o eixo na borda do bastão.

Ex 2: anel circular



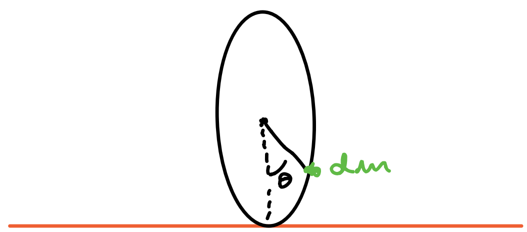
Esse caso é muito fácil: por simetria, toda a massa vai estar à mesma distância R do eixo. Portanto

$$I = \int r^2 dm = R^2 \underbrace{\int dm}_{\text{toda a massa}} = R^2 M$$

Ou seja

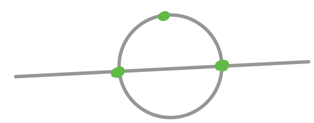
$$I = MR^2 \qquad (13)$$

Considere também a situação onde o eixo está na borda do anel



θ	r
0	0
$\pi/2$	$\sqrt{2}R$
π	$2R$

A distância de dm será, portanto



$$r = R\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

Além disso

$$dm = \frac{M}{2\pi R}\, ds = \frac{M}{2\pi R}\, R\, d\theta = \frac{M}{2\pi}\, d\theta$$

A Eq. (9) fornece, portanto

$$I = \int_0^{2\pi} R^2\, 2(1-\cos\theta)\, \frac{M}{2\pi}\, d\theta$$

$$= \frac{MR^2}{\pi} \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\, d\theta$$

Essa integral vale

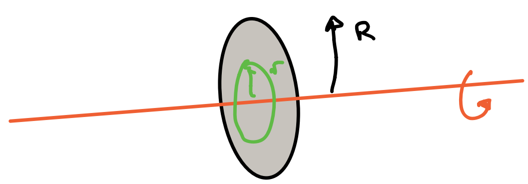
$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\, d\theta = 2\pi - \sin\theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Portanto

$$I = 2MR^2 \qquad (14)$$

veremos logo mais como derivar esse resultado sem precisar dessa integral complicada.

Ex 3: disco maciço



Podemos pensar no disco como um conjunto de aneis, como no exemplo anterior. Cada anel tem raio r e espessura dr. Portanto sua área será $dA = 2\pi r\, dr$ e sua massa

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r\, dr$$

com isso

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

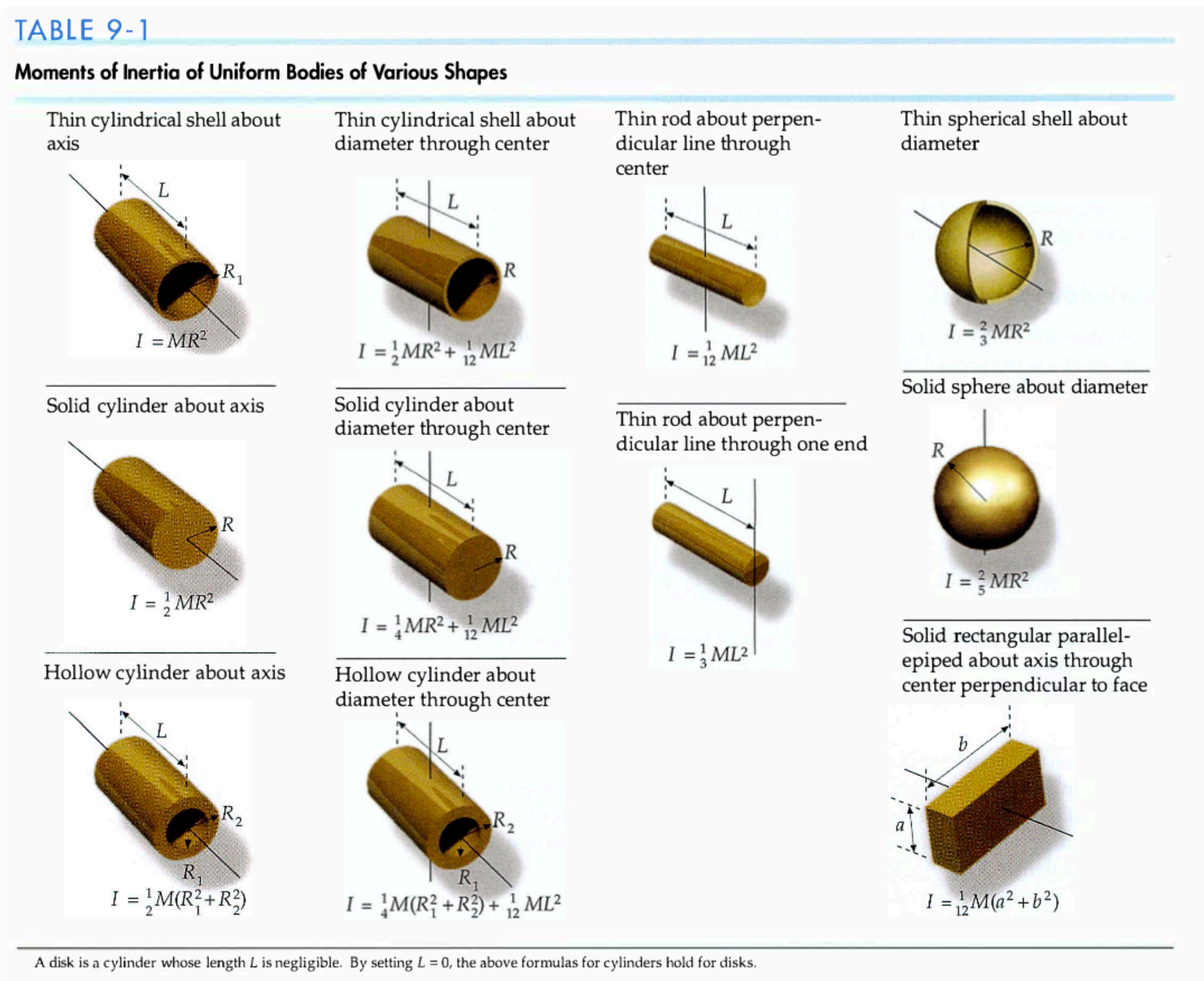
$$= \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R$$

Portanto

$$I = \frac{MR^2}{2} \qquad (15)$$

—//—

O momento de inércia de diferentes sólidos, ao redor de diferentes eixos, pode ser tabelado, como na figura abaixo.



* chupinhado sem nenhuma permissão do Tipler.

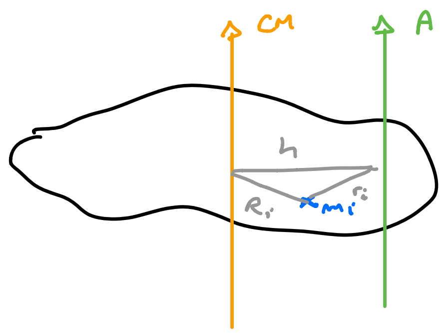
Teorema dos eixos paralelos

Existe alguma relação entre momento de inercia e centro de massa? Sim: basta saber o MI para rotações em torno de um eixo que passa pelo CM. Com isso, calcular o MI em torno de qualquer outro eixo é fácil.

Teorema: Seja I_{CM} o momento de inercia de um sólido calculado em torno de um eixo que cruza o CM do sólido. O momento de inercia ao redor de um eixo paralelo, a uma distância h do outro, será

$$I = I_{CM} + Mh^2 \qquad (16)$$

Prova: considere um sólido arbitrário e escolha um sistema de coordenadas com origem no CM



Escolhemos o eixo de rotação ao longo da direção z.

Uma massa m_i estará a uma distância

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \tag{17}$$

do eixo do CM. Seja $h = (x_A, y_A, 0)$ a distancia entre o eixo do CM e um outro eixo A. A distância entre m_i e o eixo A será portanto

$$r_i^2 = (x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 + z_i^2 \tag{18}$$

A distância z não muda, pois os eixos são paralelos.

O momento de inercia do CM será

$$I_{CM} = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \tag{19}$$

Já o MI com relação ao eixo A será

$$\begin{aligned}
I &= \sum_i m_i r_i^2 \\
&= \sum_i m_i \left\{ (x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 + z_i^2 \right\} \\
&= \sum_i m_i \left\{ (x_i^2 - 2x_i x_A + x_A^2) + (y_i - 2y_i y_A + y_A^2) + z_i^2 \right\} \\
&= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + \sum_i m_i (x_A^2 + y_A^2) \\
&\quad - \sum_i m_i (2x_i x_A + 2y_i y_A)
\end{aligned} \tag{20}$$

O 1º termo é I_{CM}. O 2º, como x_A, y_A são constantes, se torna

$$\sum_i m_i (x_A + y_A)^2 = (x_A + y_A)^2 \sum_i m_i = (x_A + y_A)^2 M \qquad (21)$$

Agora chegamos na parte essencial do teorema. No terceiro termo temos

$$-\sum_i m_i \left(2x_i x_A + 2y_i y_A\right) = -2x_A \sum_i m_i x_i - 2y_A \sum_i m_i y_i \qquad (22)$$

Mas x_i, y_i são as distâncias com relação ao CM. Portanto

$$\sum_i m_i x_i = \sum_i m_i y_i = 0 \qquad (23)$$

pela própria definição do CM. Consequentemente, a Eq. (20) se torna

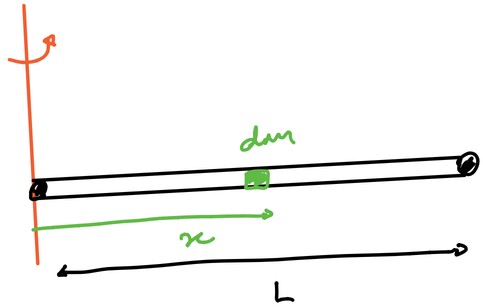
$$I = I_{cm} + M(x_A^2 + y_A^2)$$

ou,

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

onde $h^2 = x_A^2 + y_A^2$ é a distância entre os eixos paralelos. ∎

Ex 1:



O CM sobre o centro é

$$I_{cm} = \frac{ML^2}{12}$$ [Eq. (12)]. O CM sobre a borda será

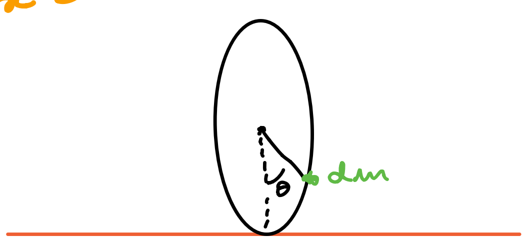
$$I = I_{cm} + M\left(L/2\right)^2$$

$$= \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4}$$

$$= \frac{ML^2}{3}$$

que é a Eq. (10), como esperado.

Ex 2:

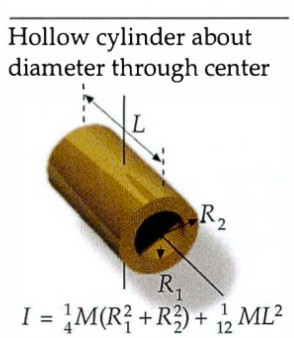


O MI sobre o eixo que passa pelo centro é $I_{cm} = MR^2$ [Eq. (13)]. Portanto o MI ao longo desse eixo será

$$I = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

que é a Eq. (14)

Ex 3:



↖ I_{cm}

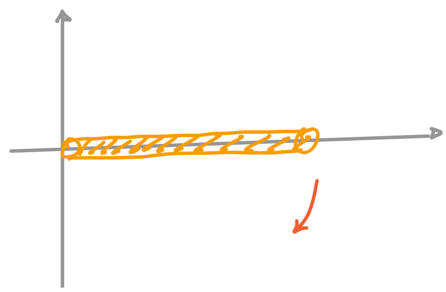
Em torno de um eixo na borda teremos

$$I = I_{cm} + \frac{ML^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}M\left(R_1^2 + R_2^2\right) + \frac{1}{3}ML^2$$

Ex: Considere um fino bastão solto da horizontal.

(a) Qual a velocidade angular quando ele está vertical?



O momento de inercia é $I = \frac{ML^2}{3}$

A energia potencial inicial será zero se escolhermos a origem vertical como na figura

$$E_i = \frac{1}{2} I \omega_i^2 + U_i = 0$$

Quando o bastão está na sua posição mais baixa a sua energia potencial será

$$U_f = Mg\,(-L/2)$$

pois $(-L/2)$ é a posição do CM. Portanto

$$E_f = \frac{1}{2} I \omega_f^2 + Mg\,(-L/2) = E_i = 0$$

Ou seja

$$\omega_f = \sqrt{\frac{MgL}{I}} \qquad (24)$$

Usando $I = ML^2/3$ obtemos

$$\omega_f = \sqrt{\frac{3g}{L}} \qquad (25)$$

Para título de comparação, se tivéssemos um pêndulo teríamos $I = mL^2$ e portanto

$$\frac{1}{2} mL^2 \omega_f^2 - mgL = 0$$

e portanto

$$\omega_f = \sqrt{2g/L}$$

Ou seja, ω_f do bastão é um pouco maior.