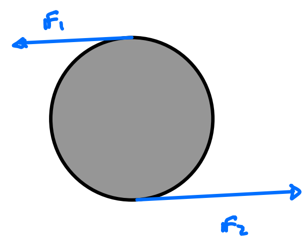
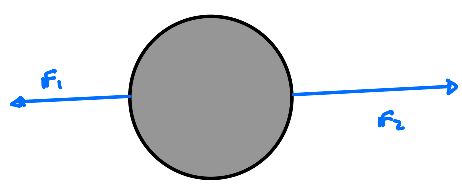
Torque: A 2ª lei para rotações

Considere um disco. Uma forma de fazê-lo girar é aplicar forças em direções apropriadas. Por exemplo:

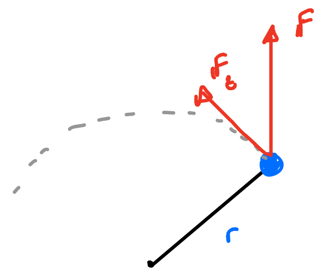


O ponto no sólido onde aplicamos as forças importa e muito. Por exemplo, se aplicarmos assim:



o sólido não vai girar. Portanto, vemos que para induzir rotações, não importa apenas a força aplicada. Importa também o ponto onde ela é aplicada. Isso introduz para nós um novo elemento. Quando tratávamos de um bloco em um plano inclinado, estávamos pensando no bloco como uma partícula pontual. Falávamos coisas como "uma força F é aplicada ao bloco", mas não especificávamos onde no bloco essa força era aplicada. Se quisermos levar em conta também o movimento "interno" do bloco, ou seja as rotações, isso passa a ser relevante.

Considere uma partícula de massa m presa a uma barra rígida, que permite que ela se mova em movimento circular



A força pode ser aplicada numa direção arbitrária. Mas como a barra é rígida, a única componente que vai importar é a tangencial. A componente normal é 100% compensada pela tensão na barra.

Ou seja, a 2ª lei será

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{T} = F_t\,\hat{\theta} + F_n\,\hat{r} + T\,\hat{r} \qquad (1)$$

A tensão da barra compensa exatamente a componente normal F_n da força externa, $T = -F_n$. Consequentemente, obtemos uma aceleração puramente tangencial

$$ma_t = F_t \qquad (2)$$

Por outro lado, quando discutimos movimento circular, vimos que a aceleração tangencial, no caso do movimento circular, tinha a forma

$$a_t = r\frac{d\omega}{dt} \qquad (3)$$

Substituindo em 2 obtemos então

$$mr\frac{d\omega}{dt} = F_t \qquad (4)$$

Multiplicamos agora por r dos dois lados, o que fornece

$$mr^2\frac{d\omega}{dt} = rF_t \qquad (5)$$

Vemos que isso tem a cara de uma segunda lei para a aceleração angular $\frac{d\omega}{dt}$. No lado esquerdo aparece o momento de inercia

$$I = mr^2 \qquad (6)$$

E no lado direito aparece a grandeza

$$\tau = rF_t \qquad (7)$$

que é chamado o torque associado com a força F.

A 2ª lei se torna, portanto

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau \qquad (8)$$

Esse é o análogo rotacional de

$$m \frac{dv}{dt} = F \qquad (9)$$

O torque, na verdade, é um vetor, assim como F. Nesse 1º momento eu estou disfarçando esse caráter vetorial para podermos nos acostumar com a ideia. Mas daqui a pouco veremos como defini-lo de forma mais geral (vai envolver produtos vetoriais).

A Eq. (8) foi derivada pensando em uma única partícula. É fácil, agora, generalizarmos isso para um sólido. A 2ª lei para cada elemento de massa m_i do sólido será

$$m_i a_{t,i} = m_i r_i \frac{d\omega}{dt} = F_{t,i} \qquad (10)$$

Aqui eu usei a mesma ideia da aula passada: cada elemento tem uma distância r_i diferente com relação ao ponto de rotação. Mas o ângulo de rotação (e portanto $\omega = d\theta/dt$) são os mesmos para todos os elementos de massa.

Multiplicando (10) por r_i, obtemos

$$m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = r_i F_{t,i} \tag{11}$$

Agora somamos esse resultado sobre todos os elementos de massa

$$\sum_i m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum_i r_i F_{ti} \tag{12}$$

Novamente, identificamos o momento de inercia

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{13}$$

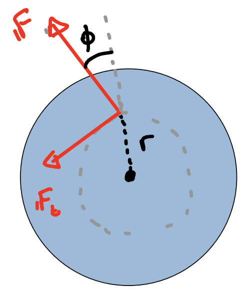
Além disso, definimos o torque resultante

$$\tau = \sum_i r_i F_{ti} \tag{14}$$

o que nos leva novamente a

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau \tag{15}$$

Exemplo: considere um disco restrito a rodar em torno do próprio eixo, no qual aplicamos uma força $\mathbb{F}$ num certo ponto



O torque será $\tau = F_t\, r$, onde r é a distância entre o ponto de aplicação da força e o eixo de rotação (nesse caso o centro do disco).

A magnitude da componente tangencial F_t da força é

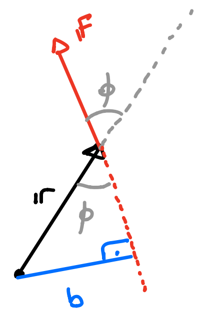
$$F_t = F \sin\phi \tag{16}$$

onde ϕ é o ângulo entre $\mathbb{F}$ e a direção radial. Portanto, o torque será

$$\tau = F r \sin\phi \tag{17}$$

Veja, portanto, que o torque é maior se aplicarmos a força (i) num ponto r o mais distante possível do eixo de rotação e (ii) perpendicularmente ao vetor $\mathbb{r}$ entre o eixo de rotação e o ponto de aplicação.

Podemos representar isso diagramaticamente da seguinte forma:

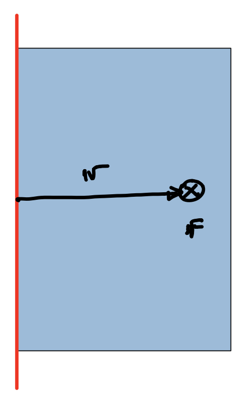


A grandeza que aparece na Eq. (17) é

$$b = r \sin\phi \tag{18}$$

chamado braço de alavanca.

Para maximizar o torque, maximizamos o braço de alavanca. O exemplo padrão disso é quando abrimos uma porta.



queremos aplicar F perpendicularmente a r e queremos aplicá-lo o mais longe possível do eixo de rotação.

Natureza vetorial do torque

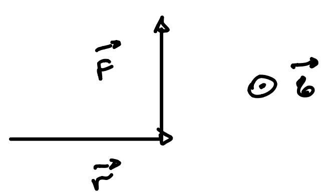
A expressão (17) para o torque pode ser reescrita em termos do produto vetorial

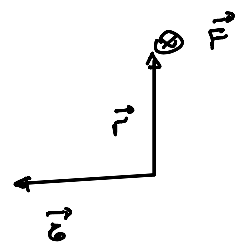
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (19)$$

O produto vetorial entre dois vetores é tal que

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF\sin\phi \qquad (20)$$

que bate, portanto, naturalmente com a (17). Já a direção do torque é perpendicular à r e à F, com sentido determinado pela regra da mão direita.





Você usa os 4 dedos para ir de $\vec{r}$ para $\vec{F}$: $\vec{\tau}$ aponta na direção do dedão.

Segue também algumas propriedades do momento angular, que são úteis de saber

- $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ (pois ϕ entre $\vec{A}$ e $\vec{A}$ é 0 e $\vec{A} \times \vec{A}$ depende do $\sin\phi$) (21)

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (pois a regra da mão direita muda o sentido) (22)

- O prod. vetorial é distributivo sobre adição

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \tag{23}$$

e compatível com a multiplicação por um escalar

$$\vec{A} \times (\lambda \vec{B}) = \lambda (\vec{A} \times \vec{B})$$

- $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$
  $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$
  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

Repare na natureza cíclica destas fórmulas: 123, 312, 231. (24)
Se quebramos essa ordem ganhamos um sinal de menos por causa da prop. 2. Por exemplo

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}.$$

- Se $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

então

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \qquad (25)$$

Esse resultado segue diretamente das Eqs (23) e (24). Por exemplo

$$(A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}) = A_x B_x \overbrace{(\hat{i} \times \hat{i})}^{0} + A_x B_y \overbrace{(\hat{i} \times \hat{j})}^{\hat{k}} + A_y B_x \underbrace{(\hat{j} \times \hat{i})}_{-\hat{k}} + A_y B_y \underbrace{(\hat{j} \times \hat{j})}_{0}$$

$$= (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \qquad (26)$$

A expressão (25) também pode ser escrita de forma mais compacta em termos de um determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (27)$$

- Sejam $\vec{A}(t)$ e $\vec{B}(t)$ dois vetores que dependem de t.

Então

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \tag{28}$$

Isso segue da Eq. (25) e da regra do produto, aplicada a escalares:

$$\frac{d}{dt}(f g) = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt} \tag{29}$$

Aplicando isso a cada termo da (25) obtemos a (28).

Momento angular

Nós vamos agora rederivar a Eq. (17) de forma puramente vetorial. Começamos com uma única partícula novamente. A 2ª lei é

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{30}$$

Agora tomamos o produto vetorial dos dois lados com $\vec{r}$. Ou seja, escrevemos

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{31}$$

No lado direito identificamos o torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{32}$$

Já no lado esquerdo, usamos o seguinte truque: considere

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \tag{33}$$

Isso é diferente do que aparece na (31). Mas, usando a (28) obtemos

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Só que $\vec{p} = m\vec{v}$ e $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$. Portanto, o 1º termo será

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v})$$
$$= m\,(\vec{v} \times \vec{v})$$
$$= 0$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (34)$$

Com isso, a Eq. (31) finalmente fica reescrita como

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{\tau} \qquad (35)$$

A grandeza $\vec{r} \times \vec{p}$ é especial e é chamada de momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (36)$$

Ou seja, podemos escrever a versão angular da 2ª lei como

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \qquad (37)$$

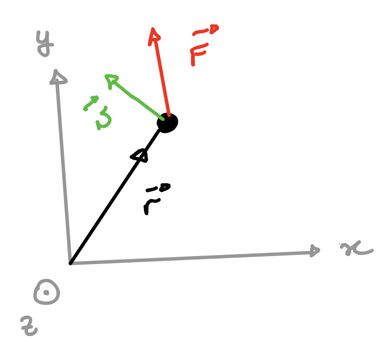
O torque produz uma variação no momento angular da partícula, assim como a força produz uma variação no momento linear [Eq. (30)].

A Eq. (37) é a versão angular da 2ª lei, escrita em toda sua glória numa forma 100% vetorial. Ela ainda não se parece, no entanto, com a Eq (17)

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau$$

Essa equação é legal pois ela relaciona 3 grandezas bem palpáveis. Já a (37) envolve esse tal de momento angular, que eu sei lá o que significa.

Vamos então agora conectar as duas coisas. Eu considero uma partícula presa a uma haste rígida, fixada na origem



A rotação é descrita por uma velocidade angular ω, que é um escalar. É conveniente, no entanto, definirmos um vetor

$$\vec{\omega} = \begin{cases} |\vec{\omega}| = \omega \\ \text{direção de } \vec{\omega} = \text{direção da rotação} \end{cases} \qquad (38)$$

Isso permite condensar tanto a velocidade de rotação quanto o eixo em um único objeto.

No caso da figura, por exemplo, teremos

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} \tag{39}$$

ou seja, saindo da tela.

Sabemos que a velocidade v e a velocidade angular ω estão relacionadas por $v = \omega r$. Podemos agora encontrar uma relação entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{\omega}$. A velocidade é tangencial e portanto perpendicular a $\vec{r}$. Ela também é perpendicular a $\vec{\omega}$ já que $\vec{v}$ está no plano e $\vec{\omega}$ está no eixo z. Ou seja

$$\vec{v} \perp \vec{r}, \qquad \vec{v} \perp \vec{\omega}, \qquad v = \omega r \tag{40}$$

Portanto, lembrando da definição de produto escalar, podemos concluir que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{41}$$

As direções são, portanto

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}, \quad \vec{r} = r \hat{r}, \quad \vec{v} = \omega r \hat{\theta} \tag{42}$$

Incidentalmente, concluímos disso também que

$$\hat{k} \times \hat{r} = \hat{\theta} \tag{43}$$

Eu deixo para você se convencer que $\hat{\theta} \times \hat{k} = \hat{r}$ e $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$.

A Eq. (41) é bacana. Por exemplo, derivando com relação a t obtemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{44}$$

O vetor $\vec{r}$ muda de sentido ao longo do tempo, mas $\vec{\omega}$ sempre aponta na direção z. Portanto

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \frac{d\omega}{dt} r \hat{\theta} = a_t \hat{\theta} \tag{45}$$

ou seja, essa é a aceleração tangencial que usamos na Eq. (3). Por outro lado, o 2º termo na (44) será

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \omega v (\hat{k} \times \hat{\theta}) = -\omega v \hat{r} \tag{46}$$

obtemos aqui a aceleração centrípeta. Ou seja, usando a Eq. (41) temos uma forma muito mais compacta de derivar as expressões para as acelerações tangencial e centrípeta.

Agora estamos finalmente na posição de relacionar a (37) com a (17). O momento angular será na direção z pois $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k}$. O mesmo será verdade para o torque. Portanto, teremos $\vec{L} = L_z \hat{k}$ e a (37) fornece

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z \tag{47}$$

Já a magnitude de L_z será $L_z = mrv = mr^2\omega$. Como r é fixo, obtemos

$$\frac{dL_z}{dt} = mr^2 \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} \tag{48}$$

Ou seja, da (47) chegamos na (17):

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau \tag{49}$$