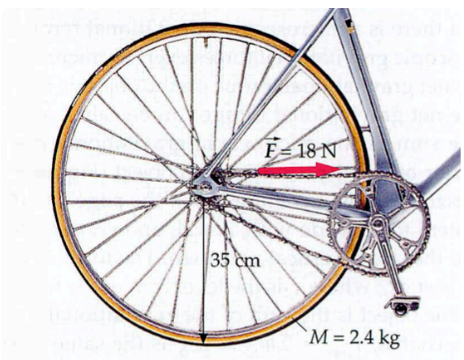
Torque, aplicações

Nesta aula estudaremos algumas aplicações simples do conceito de torque e a 2ª lei para rotações

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau \qquad (1)$$

Ex: bicicleta

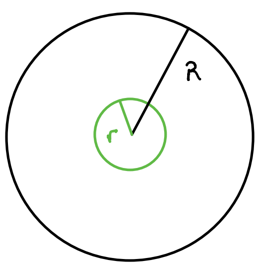
Numa bicicleta o pedal aplica um torque através da correia



A bicicleta pode ser considerada como um aro de raio R e massa M. O momento de inercia será, portanto (aula 20)

$$I = MR^2 \qquad (2)$$

A força dos pedais, no entanto, não é aplicada em R, mas na engrenagem, que fica a uma distância menor r.



O torque será, portanto,

$$\tau = F r \qquad (3)$$

Vamos supor que levantamos o pneu traseiro da bike, para que ele possa girar livremente (sem atrito). Nesse caso podemos aplicar a Eq. (1), obtendo portanto

$$MR^2 \frac{d\omega}{dt} = Fr$$

Ou seja

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Fr}{MR^2} \quad (4)$$

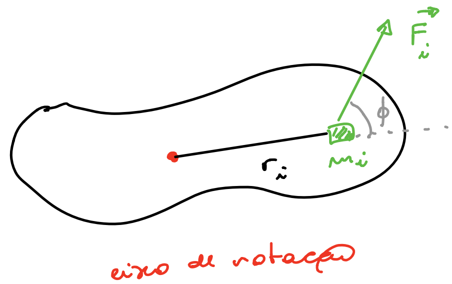
A aceleração angular vai depender portanto da força do pedal, da massa do pneu, do tamanho do pneu e do tamanho da engrenagem.

Se a força F for constante, o movimento será uniformemente acelerado. Portanto a velocidade angular será

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{Fr}{MR^2} t \quad (5)$$

Torque em um bastão devido à gravidade

O torque resultante sobre um sólido é dado por

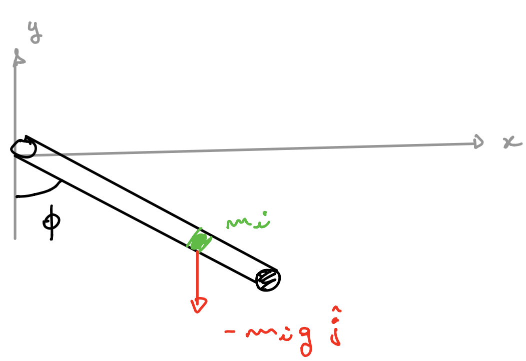


$$\tau = \sum_i r_i F_i \operatorname{sen}\phi_i \qquad (6)$$

onde a soma é sobre cada elemento de massa m_i, r_i é a distância daquele elemento ao eixo de rotação, F_i é a força aplicada ao elemento m_i e, finalmente, ϕ_i é o ângulo entre $\vec{F}_i$ e $\vec{r}_i$.

Calcular a Eq. (6) pode ser muito complicado quando a força F_i varia de um ponto a outro do sólido. Um caso que é particularmente simples, no entanto, é o da força gravitacional, pois ela é constante e portanto igual para todos os elementos F_i.

Imagine a seguinte situação: temos um bastão fino inclinado de um ângulo ϕ com relação à vertical



O torque exercido pela gravidade no elemento m_i será

$$\tau_i = F_i r_i \cos\phi = m_i g r_i \sin\phi \qquad (7)$$

Note como ϕ é o mesmo para todos os pontos do bastão.
Portanto, somando τ_i sobre todos os elementos de massa, obtemos
o torque total

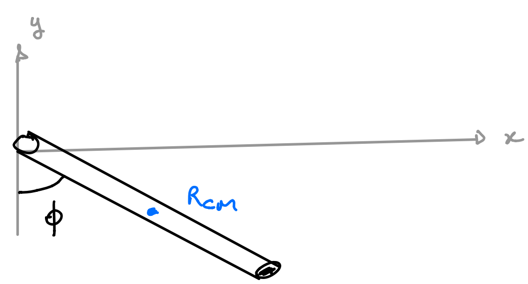
$$\tau = \sum_i m_i g r_i \sin\phi$$

$$= g \sin\phi \sum_i m_i r_i \qquad (8)$$

A grandeza que sobra na somatória está relacionada com a
distância ao centro de massa

$$\sum_i m_i r_i = M R_{CM} = \frac{ML}{2} \qquad (9)$$

onde R_{CM} é a distância entre o CM e o eixo de rotação



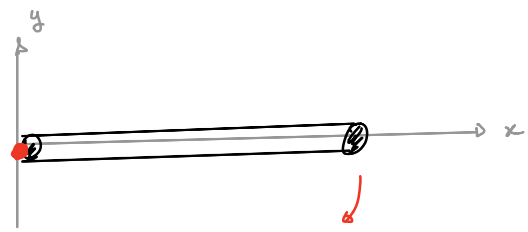
Portanto, obtemos

$$\tau = \frac{MgL}{2} \sin\phi \qquad (10)$$

Ou seja, o torque é o mesmo como se toda a massa estivesse
concentrada no CM. Isso vale apenas para o bastão, por ser muito
fino.

Ex: movimento do bastão

Considere agora o movimento do bastão, quando solto a partir da horizontal



O torque será dado pela Eq. (10). O momento de inercia vale

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Portanto, da Eq. (1) obtemos

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau$$

$$\frac{ML^2}{3} \frac{d\omega}{dt} = \frac{MgL}{2} \sin\phi$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin\phi \qquad (11)$$

A frequência angular ω é a derivada de ϕ

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

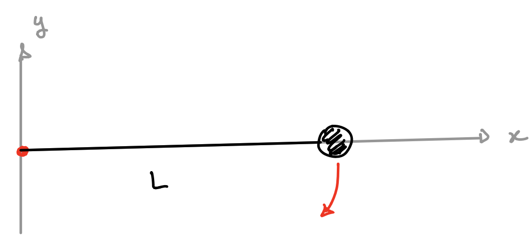
Portanto, obtemos

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{3g}{2L} \sin\phi \qquad (12)$$

Essa é uma Eq. complicada. Ela tem solução analítica, mas é extremamente feia. Notamos algumas coisas, no entanto. Primeiro, o torque, e portanto a aceleração angular, serão máximos quando $\phi = \pi/2$ (bastão horizontal). A aceleração angular máxima vale

$$\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{max} = \frac{3g}{2L} \tag{13}$$

Vamos agora contrastar isso com um pêndulo. O pêndulo é quase igual, exceto que a massa está toda concentrada na ponta



O momento de inercia será

$$I = ML^2 \tag{14}$$

E o torque, da Eq. (10), será

$$\tau = MgL\sin\phi \tag{15}$$

Portanto a Eq (1) se torna

$$ML^2\frac{d\omega}{dt} = MgL\sin\phi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{L}\sin\phi \tag{16}$$

A evolução do pêndulo é parecida com a do bastão, Eq. (11). Mas ao invés de $3g/2L$, temos agora g/L.

Vemos, portanto, que a aceleração máxima do pêndulo é <u>menor</u> que a do bastão

$$\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{max} = g/L \qquad (17)$$

Isso é um pouco contra-intuitivo pois o torque é maior

$$\tau_{pêndulo} = 2\,\tau_{bastão} \qquad (18)$$

Mas o momento de inercia é 3 vezes maior

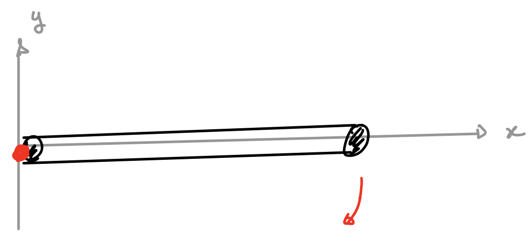
$$I_{pêndulo} = 3\,I_{bastão} \qquad (19)$$

Como a aceleração angular é τ/I, obtemos algo menor para o pêndulo

$$\frac{\tau_{pendulo}}{I_{pendulo}} = \frac{2}{3}\,\frac{\tau_{bastão}}{I_{bastão}} \qquad (20)$$

Ou seja, se pegamos um bastão e concentramos a massa toda na extremidade (virando um pêndulo), o torque será maior, mas a velocidade angular será menor. O bastão oscila mais rápido

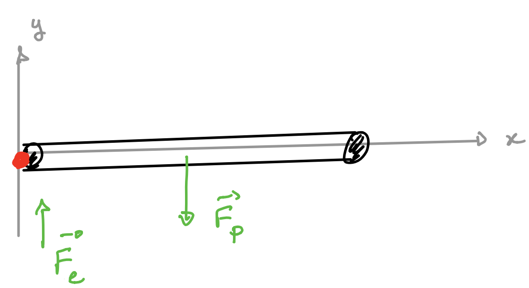
Voltemos agora para o bastão



Quando falamos de conservação do momento linear, vimos que o centro de massa se move sob a ação da força externa resultante

$$M \frac{d^2 \vec{R}_{cm}}{dt^2} = \vec{F}_{ext} \tag{21}$$

Quais são as forças externas atuando nesse problema? São duas, na verdade: temos a força peso $\vec{F}_p = -Mg\,\hat{j}$. E temos também a força que o eixo/dobradiça tem que exercer no bastão para fazê-lo rodar.



É essa combinação de $\vec{F}_e$ para cima e $\vec{F}_p$ para baixo que faz com que o bastão rode. Se não tivéssemos $\vec{F}_e$ ele iria simplesmente cair.

Vamos analizar a situação inicial, onde o bastão está na horizontal. Como o movimento é rígido a aceleração deverá ser tangencial. Portanto

$$a_{cm} = r_{cm} \frac{d\omega}{dt} = \frac{L}{2} \frac{d\omega}{dt} \qquad (22)$$

A 2ª lei (21) para a componente tangencial será, portanto

$$M a_{cm} = Mg - F_e$$

Disso podemos calcular F_e:

$$F_e = M(g - a_{cm})$$

$$= M\left[g - \frac{L}{2}\frac{d\omega}{dt} \right] \qquad (23)$$

Por outro lado, da Eq. (11) com $\phi = \pi/2$ temos que $\frac{d\omega}{dt} = 3g/2L$.

Portanto

$$F_e = M\left\{ g - \frac{L}{2}\frac{3g}{2L} \right\}$$

$$= \frac{Mg}{4} \qquad (24)$$

Finalmente, vamos analizar a rotação do bastão sob a ótica de conservação de energia. A energia total do sistema será

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 + M g y_{cm} \qquad (25)$$

Se escolhermos a origem do sistema de coordenadas tal que $y_{cm} = 0$ quando o bastão está horizontal então a energia inicial será nula

$$E_i = 0 \qquad (26)$$

A posição y_{cm} quando o ângulo for ϕ será

$$y_{cm} = -\frac{L}{2} \cos \phi$$

Teste de sanidade

$\phi = 0 \rightarrow y_{cm} = -\frac{L}{2}$

$\phi = \pi/2 \rightarrow y_{cm} = 0$

↳ horizontal

Portanto, a energia ao longo da oscilação será

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{M g L}{2} \cos \phi \qquad (27)$$

Por conservação de energia, como $E_i = 0$, devemos ter $E = 0$.

Portanto

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{M g L}{2} \cos \phi \qquad (28)$$

Usando $I = ML^2/3$ obtemos finalmente

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,ML^2\omega^2 = \frac{MgL}{2}\cos\phi$$

ou

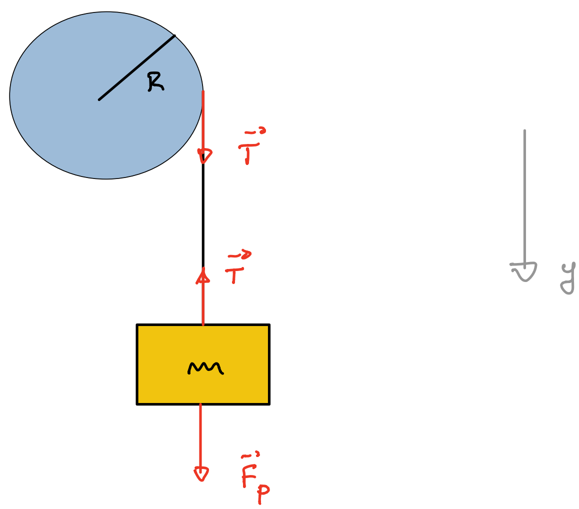
$$\omega^2 = \frac{3g}{L}\cos\phi \tag{29}$$

A velocidade é máxima quando o bastão está vertical ($\phi = 0$) e vale

$$\omega_{max} = \sqrt{3g/L} \tag{30}$$

Movimento de polias

Considere uma massa m presa, através de uma corda fina, a uma polia de raio R e massa M. Quando discutimos esses problemas anteriormente, sempre assumíamos que a polia tinha massa desprezível. Vejamos agora o que acontece quando esse não é mais o caso.



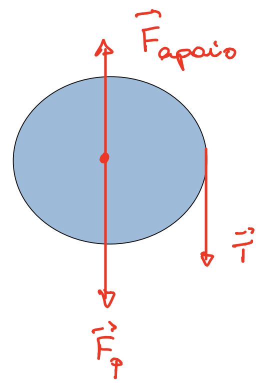
A 2ª lei para o corpo em queda lê-se

$$m a_y = mg - T \tag{31}$$

Por outro lado a 2ª lei de rotações para a polia lê-se

$$I\alpha = \tau = TR \tag{32}$$

onde $\alpha = d\omega/dt$. O torque nesse caso é exercido somente pela tensão. Existem outras forças atuando na polia, mas elas não exercem um torque



A força peso, como a polia é simétrica, exerce um torque nulo. Assumimos também que a polia está fixada na parede no seu centro, de tal forma que a $\vec{F}_{apoio}$ também não exerce um torque. Consequentemente, $\vec{F}_p$ e $\vec{F}_{apoio}$ se cancelam e o único torque vem de $\vec{T}$.

As Eqs (31) e (32) fornecem 2 equações para 3 incógnitas, a_y, α e T. Podemos obter uma terceira equação se assumirmos que não há deslizamento. Ou seja, que o quanto a corda anda é o mesmo que o quanto a polia gira:

$$a_y = \alpha R \tag{33}$$

É comum assumirmos isso em problemas pois, sem isso, não há muito mais que possamos fazer.

Temos, assim, 3 equações:

$$m a_y = mg - T \qquad (i)$$

$$I\alpha = TR \qquad (ii)$$

$$a_y = \alpha R \qquad (iii)$$

Eliminando T de (ii):

$$m a_y = mg - \frac{I\alpha}{R}$$

$$a_y = \alpha R$$

Portanto

$$m\alpha R = mg - \frac{I\alpha}{R}$$

$$(mR + I/R)\,\alpha = mg$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{mg}{mR + I/R} \qquad (34a)$$

$$a_y = \alpha R = \frac{mgR}{mR + I/R} \qquad (34b)$$

$$T = \frac{I\alpha}{R} = \frac{(I/R)\,mg}{mR + I/R}. \qquad (34c)$$

O momento de inercia da polia, se ela for um disco, será $I = MR^2/2$. Portanto, podemos simplificar a (34):

Vejamos alguns casos limites:

- $I = 0$ (massa da polia desprezivel)

  Nesse caso $a_y = mg$. O bloco cai em queda livre e $T = 0$, não há tensão

  Podemos escrever a (34b) como

$$a_y = \frac{g}{1 + I/R^2} = \frac{g}{1 + M/2}$$

  como

$$\frac{1}{1 + I/R^2} < 1$$

  vemos que uma polia com $M \neq 0$ desacelera o bloco.

- $I \to \infty$ (polia infinitamente massiva)

  Nesse caso podemos aproximar

$$mR + I/R \simeq I/R$$

Portanto dotemos

$$a_y \simeq \frac{mgR}{I/R} \rightarrow 0$$

$$T \simeq \frac{(I/R)\,mg}{I/R} \rightarrow I/R$$

Ou seja, nesse caso a polia e o bloco ficam parados e a tensão será simplesmente mg, que é a tensão que obteríamos se prendêssemos o bloco no teto.

A Eq. (34c) pode ser escrita como

$$I = \frac{mg}{(mR^2/I)+1} = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

como

$$\frac{1}{1+2m/M} < 1$$

obtemos que

$$I < mg$$

ou seja, o rolamento alivia a tensão na corda.