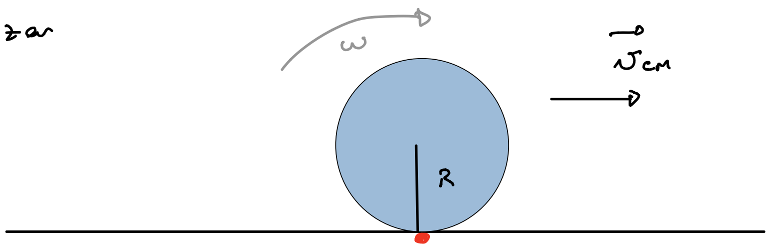
Rolamento de objetos sem deslizar

Nesta aula vamos estudar objetos rolando sobre uma superfície plana. Essencial p/ a nossa descrição é a ideia de que o objeto role sem deslizar

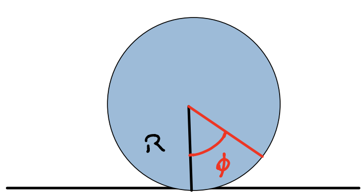


ponto de contato

"Rolar sem deslizar" significa que quando a roda dá uma volta completa, a distância horizontal percorrida será $2\pi R$, o perímetro da roda. A distância percorrida pelo CM em uma volta completa será então

$$\Delta x_{CM} = 2\pi R \qquad \text{(rotação completa)} \qquad (1)$$

Pela mesma lógica, numa rotação por um ângulo arbitrário ϕ, não necessariamente 2π, a distância percorrida pelo CM será



$$\Delta x_{CM} = R\phi \qquad (2)$$

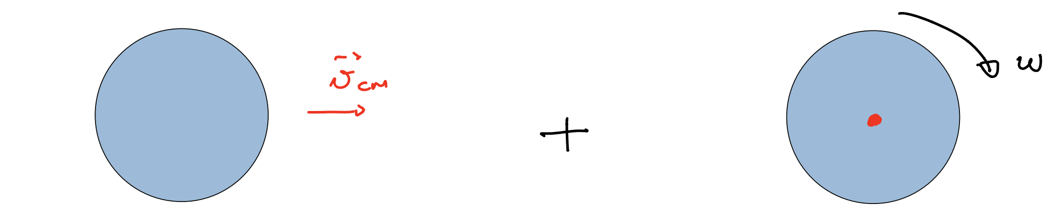
(rotação de ϕ)

Derivando ambos os lados com relação a t obtemos

$$v_{CM} = R\omega \qquad (3)$$

Essa equação relaciona o movimento de translação com a rotação. Por causa da condição de não deslizamento, os dois estão diretamente conectados. Um objeto que rola com deslizamento tem um ω e um v_{cm} que não estão diretamente conectados. A condição de não deslizamento, no entanto, fixa uma relação um-para-um entre os dois.

Nós podemos imaginar a rotação sem deslizamento como a composição de 2 movimentos distintos: a translação do CM junto com uma rotação em torno de um eixo que passa pelo CM



Podemos pensar como se fossem dois movimentos "independentes", exceto que v_{cm} e ω estão ligados pela Eq. (3). Então, por exemplo, a energia cinética será

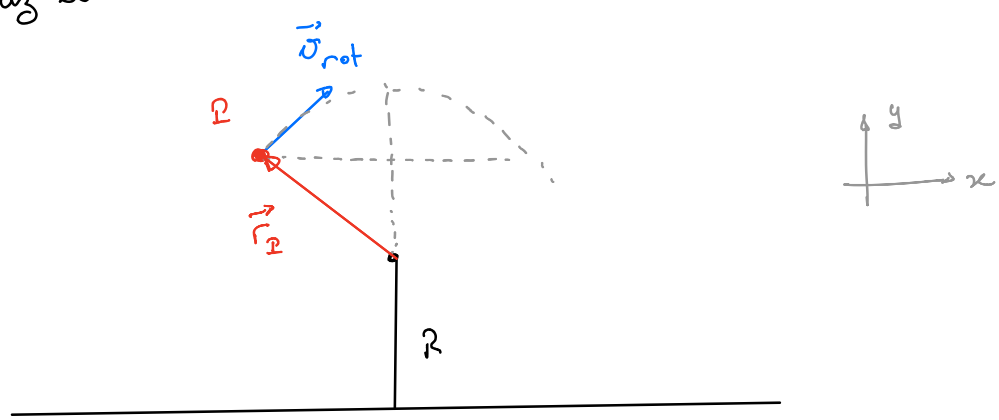
$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{4}$$

Por causa desses dois movimentos acontecendo, cada ponto na roda se move com uma velocidade diferente. Considere um certo ponto P

A velocidade de P será a velocidade do CM mais a velocidade interna de rotação:

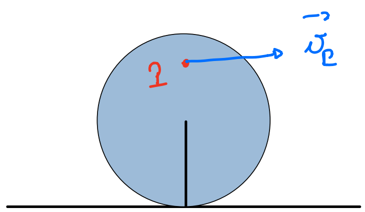
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{rot} \qquad (5)$$

Sabemos calcular $\vec{v}_{Rot}$ pois o movimento é circular. Consequentemente $\vec{v}_{rot}$ deve sempre ser tangencial à circunferência que o ponto P faz em torno do CM.



A magnitude de $\vec{v}_{rot}$ será simplesmente $v_{rot} = \omega r_P$, onde r_P é a distância ao CM.

Como $\vec{v}_{rot}$ é tangencial, ele deverá ser sempre perpendicular ao vetor $\vec{r}_P$ que liga o ponto P ao CM (eixo de rotação). Por exemplo, no ponto mais alto da roda $\vec{v}_{rot}$ será na direção $\hat{i}$, assim como $\vec{v}_{CM}$

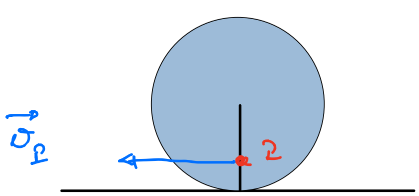


$$\vec{v}_P = v_{CM}\,\hat{i} + \omega r_P\,\hat{i}$$

$$= \omega(R + r_P)\,\hat{i} \qquad (6)$$

No ponto mais alto $r_P = R$ e portanto $v_P = 2v_{CM}$. O ponto mais alto está a uma velocidade que é duas vezes a velocidade do CM.

Por outro lado, se P está abaixo do CM a velocidade de rotação será na direção $-\hat{i}$.



$$\vec{v}_P = v_{CM}\,\hat{i} - \omega r_P\,\hat{i}$$

$$= \omega(R - r_P)\,\hat{i} \qquad (7)$$

Em particular, a velocidade do ponto de contato será nula. Essa é uma das principais propriedades da rolagem sem deslizamento: o ponto de contato está sempre em repouso.

Exemplo

Uma bola rola sem deslizamento com velocidade v_{cm}. Ela entra em uma região com um plano inclinado. Qual altura ele sobe?

A energia cinética inicial será

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} (M + I/R^2) v_{cm}^2 \qquad (8)$$

Isso deve equiparar a energia potencial Mgh. Portanto

$$Mgh = \frac{1}{2} (M + I/R^2) v_{cm}^2$$

ou

$$h = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{I}{MR^2} \right) v_{cm}^2 \qquad (9)$$

Quem sobe mais? Um cilindro ou uma esfera?

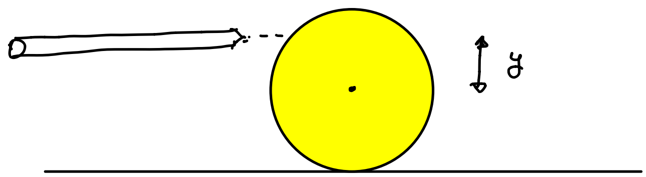
$$I_{cilindro} = \frac{MR^2}{2} \qquad I_{esfera} = \frac{2}{5} MR^2 \tag{10}$$

Sobe mais o objeto que tiver o maior momento de inercia, que é o cilindro. O cilindro oco sobe ainda mais

$$I_{cilindro\ oco} = MR^2 \tag{11}$$

Exemplo: sinuca

O taco acerta a bola a uma altura y do CM. Qual deve ser o valor de y para a bola rolar sem deslizamento?



Se $y=0$ não haverá torque e o movimento será puramente translacional.

A aceleração do CM será

$$a_{CM} = F/M \tag{12}$$

onde F é a força devido a tacada. Já o torque será $\tau = Fy$ e portanto a aceleração angular $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ pode ser obtida de

$$I\alpha = \tau$$

ou

$$\alpha = \frac{Fy}{I} \tag{13}$$

A condição para que não haja deslizamento é que $v_{CM} = R\omega$. Mas isso só vai ocorrer se $a_{CM} = R\alpha$. Portanto

$$\frac{F}{M} = R\frac{Fy}{I}$$

de onde obtemos

$$y = \frac{I}{MR} \qquad (14)$$

Note como F se cancela. O ponto ideal para não haver deslizamento não depende da magnitude da força.

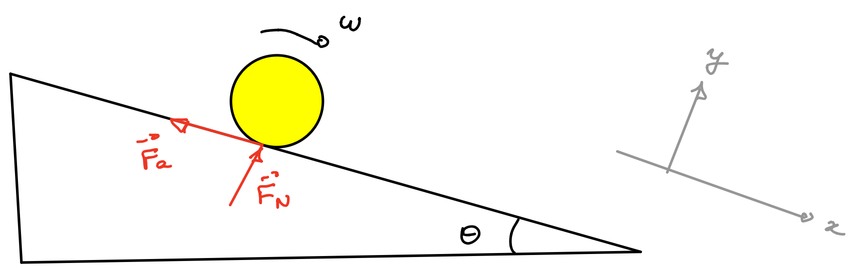
Usando $I = \frac{2}{5}MR^2$ para uma esfera, por exemplo, obtemos

$$y = \frac{2}{5}R \qquad (15)$$

Essa é a altura ideal para a tacada perfeita. # Ficaadica.

Rolamento num plano inclinado

Considere um objeto circular, como uma esfera ou um cilindro, rodando sem deslizar num plano inclinado



Escolhemos um sistema de coordenadas inclinado. Analisamos separadamente o movimento translacional do movimento rotacional.

O que permite a bola rodar é o atrito. Se não houvesse atrito ela nunca rolaria. No caso onde não há deslizamento, como vimos, o ponto de contato está sempre em repouso. Portanto o atrito nesse caso é sempre o atrito estático.

Pensando na translação a normal vai compensar a componente y do peso, de tal forma que a aceleração do CM será só na direção x.

$$m a_{CM} = mg \sin\theta - F_a \tag{16}$$

Por outro lado, quem produz torque é a força de atrito. A força peso age no CM e a força normal é paralela ao vetor entre o CM e o ponto onde ela é aplicada. Ou seja

$$\tau = F_a R \tag{17}$$

e portanto

$$I\alpha = \tau = F_a R \tag{18}$$

Para simplificar, vamos escrever

$$I = \beta m R^2 \tag{19}$$

onde $\beta = 2/5, 1/2$, etc. é um fator numérico que muda de um objeto para o outro.

Temos, então, de (16) e (17)

$$a_{cm} = g \sin\theta - \frac{F_a}{m}$$

$$\alpha = \frac{F_a}{\beta m R} \tag{20}$$

Por fim usamos a condição de não deslizamento

$$a_{cm} = \alpha R \tag{21}$$

Isso nos dá 3 equações p/ 3 incógnitas: a_{cm}, α e F_a. Resolvendo para a_{cm}

$$a_{cm} = g \sin\theta - \frac{\beta m R \alpha}{m}$$

$$= g \sin\theta - \beta R \left(a_{cm} / R \right)$$

$$= g \sin\theta - \beta a_{cm}$$

Ou seja

$$(1 + \beta)\, a_{cm} = g \sin\theta$$

e portanto

$$a_{cm} = \frac{g \sin\theta}{1 + \beta} \qquad (22)$$

Quanto maior o momento de inercia, menor será a aceleração. Ou seja, a_{cm} é sempre menor que $g \sin\theta$ por causa do rolamento.

Já a força de atrito será

$$F_a = \beta m R \alpha = \beta m\, a_{cm}$$

ou

$$F_a = \frac{\beta}{1 + \beta} m g \sin\theta \qquad (23)$$

Ambos a_{cm} e F_a são independentes do raio do objeto. Portanto, duas esferas de raios diferentes descem com a mesma aceleração. Por outro lado, uma esfera ($\beta = 2/5$) e um cilindro ($\beta = 1/2$) terão acelerações diferentes.

Como o atrito é estático, não há dissipação de energia. Portanto, se um objeto parte do repouso a uma altura h, teremos

$$
\begin{aligned}
mgh &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \beta m R^2 \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \beta m v_{cm}^2 \\
&= \frac{1}{2} m (1+\beta) v_{cm}^2
\end{aligned}
$$

Ou seja

$$
v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\beta}} \qquad (24)
$$

A velocidade, novamente, não depende nem da massa nem do raio. E ela é menor que $\sqrt{2gh}$, que seria a velocidade se não houvesse atrito.

Podemos também comparar F_a com F_a^{max}, a força de atrito estático máxima antes do corpo começar a deslizar. Lembre-se que

$$F_a^{max} = \mu_e N = \mu_e mg \cos\theta \tag{25}$$

comparamos isso com a (23):

$$F_a = \frac{\beta}{1+\beta} mg \sin\theta \tag{26}$$

Se $F_a < F_a^{max}$ o objeto não vai deslizar. Se $F_a > F_a^{max}$ ele vai deslizar. Obtemos portanto

$$\frac{\beta}{1+\beta} \sin\theta < \mu_e \cos\theta$$

ou

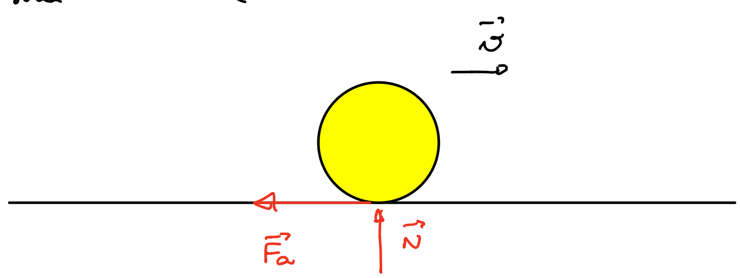
$$\tan\theta < \mu_e \left(\frac{1+\beta}{\beta} \right) \tag{27}$$

Isso fornece uma expressão p/ a inclinação limite θ^* do plano, depois da qual o objeto passaria a deslizar.

Rolagem com deslizamento

Quando há deslizamento $v_{cm} \neq \omega R$. Podemos ter tanto $v_{cm} > \omega R$ ou $v_{cm} < \omega R$. Nesse caso o atrito em questão será cinético.

Considere, por exemplo, uma bola de boliche arremessada de tal forma que inicialmente ela não está rodando. Focamos primeiro na translação



A normal será $N = mg$. A 2ª lei p/ a componente horizontal será, portanto

$$m a_{cm} = - F_a = - \mu_c N = - \mu_c m g \tag{28}$$

onde o atrito agora será cinético. A força de atrito irá, portanto, desacelerar o corpo:

$$a_{cm} = - \mu_c g \tag{29}$$

$$v_{cm}(t) = v_0 - \mu_c g t \tag{30}$$

Agora olhamos para as rotações. Quem produz o torque é novamente a força de atrito, assim como no problema anterior. Portanto

$$I\alpha = F_a R = \mu_c m g R$$

Usando $I = \beta m R^2$, onde $\beta = 2/5$ no caso da bola de boliche, obtemos

$$\beta m R^2 \alpha = \mu_c m g R$$

e

$$\alpha = \frac{\mu_c g}{\beta R} \tag{31}$$

A aceleração angular é <u>positiva</u>. A velocidade angular vai aumentar

$$\omega = \omega_0 + \frac{\mu_c g}{\beta R} t \tag{32}$$

Neste problema $v_{cm} \neq \omega R$. Começamos com v_{cm} grande e $\omega = 0$. Com o passar do tempo, no entanto, a força de atrito cinético vai diminuir v_{cm} [Eq. (30)] e aumentar ω [Eq. (32)]. Isso vai ocorrer até o ponto quando $v_{cm} = \omega R$. A partir desse ponto, a bola passa a rolar sem deslizamento. Ou seja, o atrito cinético tende a restaurar um movimento sem deslizamento.