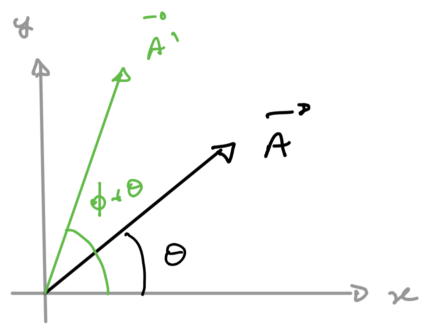
Rotações e momento angular: Formulação matemática

Nas aulas anteriores exploramos os conceitos de rotação e etc. de uma maneira não muito formal, focando na intuição por trás dos fenômenos. Nessa aula vamos rever esses conceitos de forma mais rigorosa e matematicamente sofisticada. Isso vai permitir lidarmos com uma gama maior de problemas.

Do ponto de vista matemático, uma rotação é uma operação que leva um vetor $\vec{A}$ em outro vetor $\vec{A}'$



Ou seja, se rodamos de um ângulo ϕ um vetor $\vec{A}$ que antes fazia um ângulo θ com o eixo x, obtemos um novo vetor $\vec{A}'$ que fará um ângulo $\theta+\phi$, mas com a mesma magnitude, $|\vec{A}'| = |\vec{A}|$

As componentes de $\vec{A}$ e $\vec{A}'$ podem ser relacionadas usando trigonometria. Escrevemos

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \\ &= A\cos\theta\,\hat{i} + A\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{j} \end{aligned} \tag{1}$$

onde $A = |\vec{A}|$. Da mesma forma, escrevemos

$$\vec{A}' = A_x' \hat{i} + A_y' \hat{j}$$

$$= A\cos(\theta+\phi)\,\hat{i} + A\,\mathrm{sen}(\theta+\phi)\,\hat{j} \qquad (2)$$

pois $|\vec{A}'| = A$ e o ângulo que $\vec{A}'$ faz com o eixo x é $\theta+\phi$.

Agora expandimos os termos em (2) usando

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi$$
$$\mathrm{sin}(\theta+\phi) = \mathrm{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\,\mathrm{sen}\phi \qquad (3)$$

com isso

$$\vec{A}' = A\left(\cos\theta\cos\phi - \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi\right)\hat{i} + A\left(\mathrm{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\,\mathrm{sen}\phi\right)\hat{j} \qquad (4)$$

Podemos identificar nessa formula as componentes do vetor inicial

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\,\mathrm{sen}\theta \qquad (5)$$

obtemos então

$$\vec{A}' = \left(A_x\cos\phi - A_y\,\mathrm{sin}\phi\right)\hat{i} + \left(A_y\cos\phi + A_x\,\mathrm{sen}\phi\right)\hat{j} \qquad (6)$$

Concluímos, portanto, que as novas componentes do vetor, após a rotação, serão

$$A_x' = A_x \cos\phi - A_y \sin\phi$$
$$A_y' = A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \qquad (7)$$

Isso fornece a receita para rodar um vetor no plano xy de um ângulo ϕ.

Estaremos particularmente interessados em rotações infinitesimais. Ou seja, onde o ângulo ϕ é substituído por um ângulo infinitesimal $d\phi$.

As funções $\text{sen}(d\phi)$ e $\cos(d\phi)$, quando $d\phi$ é pequeno, se comportam da seguinte maneira:

$$\text{sen}(d\phi) \simeq d\phi$$
$$\cos(d\phi) \simeq 1 - \frac{d\phi^2}{2} \simeq 1 \qquad (8)$$

Isso é a chamada série de Taylor da função. Usando isso em (7) obtemos

$$A_x' \simeq A_x - A_y\, d\phi$$
$$A_y' = A_y + A_x\, d\phi \qquad (9)$$

Vocês vêm que, no caso de uma rotação infinitesimal, o vetor final $\vec{A}'$ é igual ao vetor original $\vec{A}$ mais uma pequena correção da ordem $d\phi$:

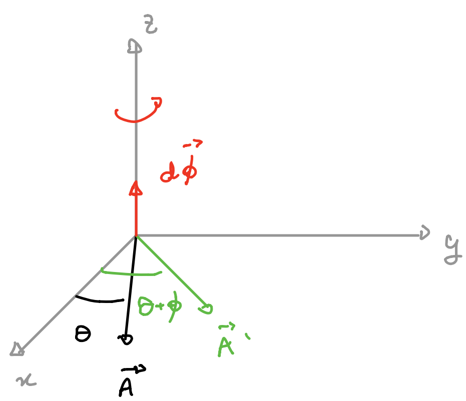
$$\begin{aligned} \vec{A}' &= A_x' \hat{i} + A_y' \hat{j} \\ &= \vec{A} + \left(-A_y d\phi \, \hat{i} + A_x d\phi \, \hat{j} \right) \end{aligned} \tag{10}$$

Este termo adicional é meio estranho e mistura x com y. Mas veremos agora que ele pode ser escrito como um produto vetorial.

Introduzimos o vetor

$$\vec{d\phi} = d\phi \, \hat{k} \tag{11}$$

Ou seja, é um vetor de módulo $d\phi$ e apontando na direção z.



Ele aponta na direção z pois essa é a direção em torno da qual estamos fazendo a rotação.

Lembre-se, agora, da expressão para o produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \qquad (12)$$

Usamos isso para calcular

$$\begin{aligned} \vec{d\phi} \times \vec{A} &= (d\phi\,\hat{k}) \times (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \\ &= -d\phi\, A_y\, \hat{i} + d\phi\, A_x\, \hat{j} \end{aligned} \qquad (13)$$

Isso é exatamente o que aparece na Eq. (10). Ou seja, podemos escrever

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{d\phi} \times \vec{A} \qquad (14)$$

É mais conveniente trabalhar com a variação de $\vec{A}$

$$d\vec{A} = \vec{A}' - \vec{A} \qquad (15)$$

Obtemos, portanto

$$d\vec{A} = d\vec{\phi} \times \vec{A} \tag{16}$$

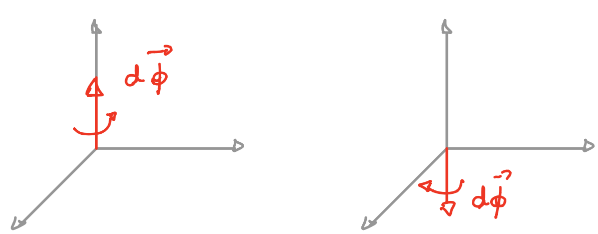
Essa é uma expressão super geral. Ela descreve o quanto que um vetor $\vec{A}$ varia quando o rodamos por um ângulo infinitesimal $d\phi$ ao longo do eixo definido por $d\vec{\phi}$.

É verdade que na nossa derivação eu assumi que $d\vec{\phi}$ apontava na direção z. Mas não tem nada de especial nessa direção. O mesmo resultado valeria se a rotação fosse em qualquer outra direção.

O vetor $d\vec{\phi}$ fez, portanto, condensa toda a informação sobre a rotação.

$$d\vec{\phi} : \begin{cases} |d\vec{\phi}| = \text{magnitude da rotação (infinitesimal)} \\ \text{direção} = \text{eixo sobre o qual realizamos a rotação} \\ \text{sentido} = \text{se a rotação é horária ou anti-horária} \end{cases} \tag{17}$$

A questão do sentido é uma convenção. Escolhemos tal que sentido positivo representa uma rotação anti-horária



A Eq. (16) fornece, portanto, uma receita matemática para rotações infinitesimais. Ela diz como que um vetor $\vec{A}$ qualquer muda se o rodamos de um ângulo infinitesimal $d\phi$. A Eq. só vale para ângulos infinitesimais. Caso contrário é necessário usar a Eq. (7).

O vetor depois da rotação será

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + d\vec{A} \\ &= \vec{A} + d\vec{\phi} \times \vec{A} \end{aligned} \tag{18}$$

Podemos calcular o módulo de $\vec{A}$ usando a relação

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \tag{19}$$

Com isso obtemos

$$|\vec{A}'|^2 = |\vec{A}|^2 + |d\vec{\phi} \times \vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot (d\vec{\phi} \times \vec{A}) \tag{20}$$

Mas lembre que $\vec{a} \times \vec{b}$ é perpendicular tanto à $\vec{a}$ quanto a $\vec{b}$. Ou seja, $d\vec{\phi} \times \vec{A}$ será perpendicular a $\vec{A}$ e, portanto, o último termo será nulo

$$\vec{A} \cdot (d\vec{\phi} \times \vec{A}) = 0 \tag{21}$$

Assim, obtemos

$$|\vec{A}'|^2 = |\vec{A}|^2 + |d\vec{\phi} \times \vec{A}|^2 \tag{22}$$

Começamos essa aula dizendo que, por definição, numa rotação o módulo do vetor não muda, apenas a direção. A Eq. (22) parece dizer o contrário. Mas na verdade, o que ocorre é que $|d\vec{\phi} \times \vec{A}|^2$ é algo da ordem de $d\phi^2$. Como $d\phi$ é infinitesimal,

$d\phi^2$ será super infinitesimal e portanto desprezível. Ou seja

$$|\vec{A}'|^2 \simeq |\vec{A}|^2 \tag{23}$$

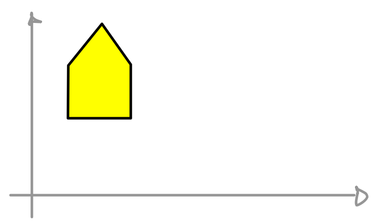
e, de fato, o módulo é conservado.

Decomposição geral do movimento de um solido

Vamos agora provar um resultado importante:

"O movimento mais geral de um sólido pode ser decomposto em dois: uma translação e uma rotação" (24)

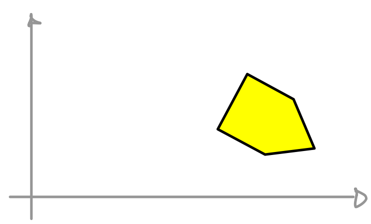
A ideia é intuitiva. Considere um sólido arbitrário e suponha que em um dado instante de tempo ele está na seguinte posição



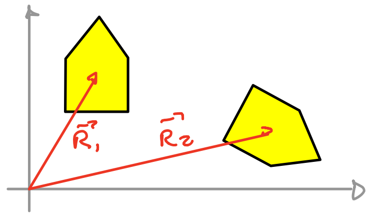
tempo t_1

Passado algum tempo, olhamos para ele e vemos que está em

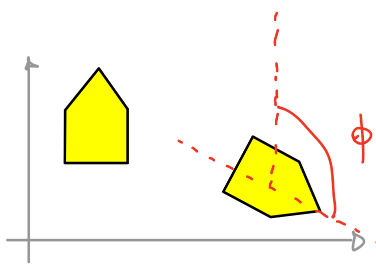
tempo t_2



Essa mudança na configuração do sólido pode ser decomposta em duas contribuições: uma rotação do CM, do ponto $\vec{R}_1$ p/ o ponto $\vec{R}_2$.



e uma rotação do sólido de um certo ângulo em torno de um certo eixo

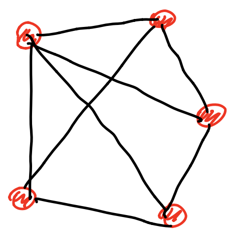


Ou seja, o movimento completo pode ser imaginado como sendo duas contribuições.

Note que o argumento é puramente cinemático. Não estamos entrando no mérito do que causou essa mudança. Estamos interessados apenas na sua descrição matemática.

Para colocar isso em termos matemáticos, imaginamos o sólido como uma coleção de partículas pontuais de massa mi. O que faz com que o sólido seja sólido (e não um gás ou um líquido) é o vínculo que estabelece que a distância entre as partículas estão fixas.

Podemos imaginar isso como uma coleção de partículas de massa m_i ligadas por hastes rígidas de massa desprezível



A posição do CM deste conjunto é

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \tag{25}$$

Usaremos também as posições relativas de cada partícula em relação ao CM:

$$\vec{r}_{i,CM} := \vec{r}_i - \vec{R}_{CM} \tag{26}$$

ou, o que é a mesma coisa,

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_{i,CM} \tag{27}$$

Isso diz que a posição de um ponto qualquer do sólido pode ser decomposta na posição do CM mais a posição relativa daquele ponto em relação ao CM. Nenhuma novidade.

Pensamos agora numa pequena variação nas posições $\vec{r}_i$, durante um intervalo infinitesimal dt. Da Eq. (27) podemos pensar nesta variação como sendo a combinação da variação em $\vec{R}_{cm}$ com a variação em $\vec{r}_{i,cm}$:

$$d\vec{r}_i = d\vec{R}_{cm} + d\vec{r}_{i,cm} \tag{28}$$

Não há nenhum tipo de restrição sobre a variação em $\vec{R}_{cm}$. Mas a variação em $\vec{r}_{i,cm}$ não pode ser arbitrária pois a distância entre a partícula i e o CM não pode mudar. Ou seja, $|\vec{r}_{i,cm}|$ deve permanecer constante. É isso que faz o sólido ser sólido.

Consequentemente, a única mudança permitida para os $\vec{r}_{i,cm}$ é uma rotação. Além disso, o ângulo de rotação deve ser o mesmo para todos os $\vec{r}_{i,cm}$, que é novamente a condição para o sólido ser sólido. Ou seja, devemos ter, da Eq. (16)

$$d\vec{r}_{i,cm} = d\vec{\phi} \times \vec{r}_{i,cm} \tag{29}$$

onde $d\vec{\phi}$ é o mesmo para todos.

Substituindo em (29), obtemos então

$$d\vec{r}_i = d\vec{R}_{cm} + d\vec{\phi} \times \vec{r}_{i,cm} \tag{30}$$

Dividindo os dois lados por dt obtemos

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} + \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r}_{i,cm} \tag{31}$$

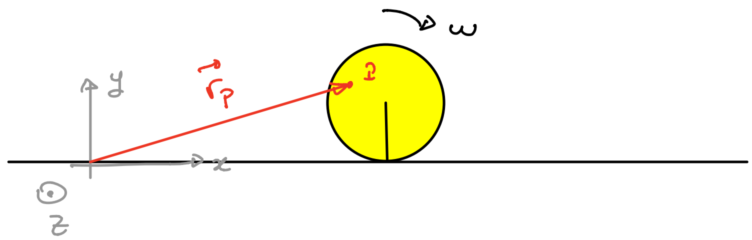
que podemos escrever como

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i,cm}} \tag{32}$$

onde $\vec{\omega} = d\vec{\phi}/dt$. Essa equação é super importante! Ela estabelece a estrutura geral para a velocidade de um ponto qualquer do sólido, em termos da velocidade do centro de massa e de uma velocidade angular de rotação $\vec{\omega}$, em torno de algum eixo arbitrário (que não precisa ser o eixo do CM). Ela vale para qualquer sólido e qualquer eixo de rotação. Note também que a (30) é uma relação cinemática. Ela não se refere aos mecanismos que geram a translação e a rotação. Ela é apenas uma decomposição de $\vec{v}_i$.

Ex: rolagem sem deslizamento

Considere o problema estudado na aula passada



Como a rotação é horária, devemos ter

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{k} \tag{33}$$

A posição do CM é

$$\vec{R}_{CM} = x_{CM}(t)\,\hat{i} + R\,\hat{j} \tag{34}$$

Ou seja, a altura do CM é fixa enquanto sua posição horizontal varia.

Considere agora um ponto P no sólido e seja $\vec{r}_P(t)$ sua posição com relação a um sistema de coordenadas no chão. De acordo com a Eq. (32), a velocidade desse ponto será

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P,CM} \tag{35}$$

Aqui

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{dx_{CM}}{dt}\,\hat{i} \tag{36}$$

Ou seja, podemos escrever

$$\vec{v}_{CM} = v_{CM}\,\hat{i} \tag{37}$$

Além disso, $\vec{r}_{P,CM}$ na Eq. (35) é dado pela Eq. (26)

$$\vec{r}_{P,CM} = \vec{r}_P - \vec{R}_{CM} \tag{38}$$

Como o ponto P está no plano xy, podemos escrever

$$\vec{r}_{P,CM} = (x_P - x_{CM})\,\hat{i} + (y_P - R)\,\hat{j} \tag{39}$$

Como $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$, teremos

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{P,CM} = -\omega(x_P - x_{CM})\underbrace{(\hat{k} \times \hat{i})}_{\hat{j}} - \omega(y_P - R)\underbrace{(\hat{k} \times \hat{j})}_{-\hat{i}}$$

$$= \omega(y_P - R)\,\hat{i} - \omega(x_P - x_{CM})\,\hat{j} \tag{40}$$

Portanto a velocidade (35) do ponto P será

$$\vec{v}_P = \left[v_{CM} + \omega(y_P - R) \right]\hat{i} - \omega(x_P - x_{CM})\,\hat{j} \tag{41}$$

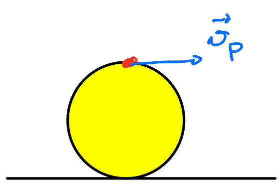
Finalmente, temos a condição de não deslizamento

$$v_{cm} = \omega R \tag{42}$$

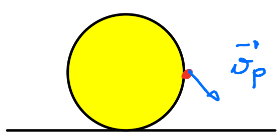
o que fornece então

$$\vec{v}_p = \omega y_p \hat{i} - \omega (x_p - x_{cm}) \hat{j} \tag{43}$$

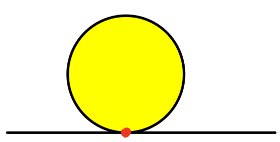
vejamos alguns exemplos característicos:



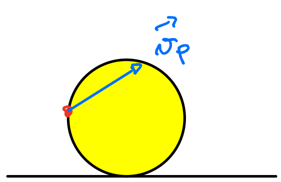
$$x_p = x_{cm} \qquad \vec{v}_p = 2\omega R \, \hat{i}$$
$$y_p = 2R \qquad \quad = 2 v_{cm} \hat{i}$$



$$x_p = x_{cm} + R \qquad \vec{v}_p = \omega R \hat{i} - \omega R \hat{j}$$
$$y_p = R$$



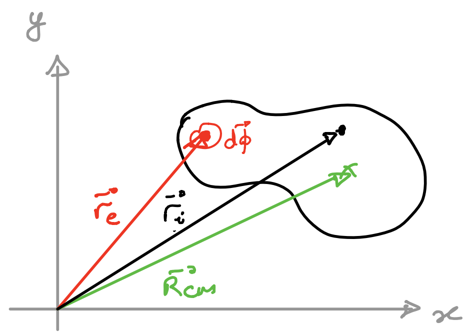
$$x_p = x_{cm} \qquad \vec{v}_p = 0$$
$$y_p = 0$$



$$x_p = x_{cm} - R \qquad \vec{v}_p = \omega R \hat{i} + \omega R \hat{j}$$
$$y_p = R$$

Ex: rotação em torno de um eixo fixo

Considere agora um sólido rodando em torno de um eixo fixo



O eixo de rotação é descrito pelo vetor $d\vec{\phi}$ saindo do plano da terra. Denotamos também por $\vec{r}_e$ a posição do eixo no plano xy.

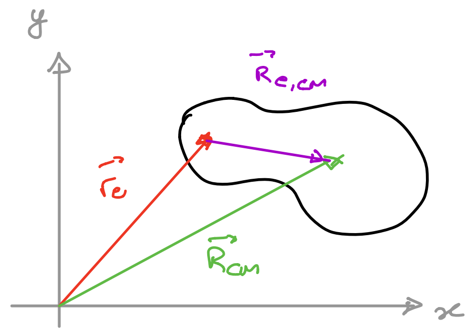
A variação na posição $\vec{r}_i$ de um ponto qualquer do sólido será dada pela Eq. (30)

$$d\vec{r}_i = d\vec{R}_{CM} + d\vec{\phi} \times \vec{r}_{i,CM} \tag{44}$$

O que torna "rodar sobre um eixo fixo" especial é que, nesse caso, o movimento do CM também é sujeito a uma restrição: o vetor

$$\vec{R}_{e,CM} = \vec{R}_{CM} - \vec{r}_e \tag{45}$$

pode apenas rodar (magnitude constante).



Ou seja

$$d\vec{R}_{e,cm} = d\vec{\phi} \times \vec{R}_{e,cm} \tag{46}$$

como

$$\vec{R}_{cm} = \vec{r}_e + \vec{R}_{e,cm} \tag{47}$$

teremos então

$$d\vec{R}_{cm} = d\vec{r}_e + d\vec{R}_{e,cm} \tag{48}$$

Mas o vetor $\vec{r}_e$ do eixo de rotação está fixo, portanto $d\vec{r}_e = 0$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned} d\vec{R}_{cm} &= d\vec{R}_{e,cm} \\ &= d\vec{\phi} \times \vec{R}_{e,cm} \\ &= d\vec{\phi} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{r}_e) \end{aligned} \tag{49}$$

Substituindo isso em (44) obtemos

$$d\vec{r}_i = d\vec{\phi} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{r}_e) + d\phi \times \vec{r}_{i,cm}$$

ou

$$d\vec{r}_i = d\vec{\phi} \times (\underbrace{\vec{R}_{cm} + \vec{r}_{i,cm}}_{\vec{r}_i} - \vec{r}_e)$$

Ou seja

$$d\vec{r}_i = d\vec{\phi} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_e) \qquad (50)$$

A rotação de um ponto $\vec{r}_i$ depende do produto vetorial entre o vetor de rotação $d\vec{\phi}$ e a posição <u>relativa</u> entre $\vec{r}_i$ e o eixo de rotação $\vec{r}_e$.

Por exemplo, um ponto que está em cima do eixo de rotação ($\vec{r}_i = \vec{r}_e$) não roda nada.

A velocidade de rotação do ponto $\vec{r}_i$ será

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_e) \qquad (51)$$

Essa é a especialização da (32) para o caso de rotação em torno de um eixo fixo.

Energia cinética de rotação

A energia cinética do sólido será dada pela soma das energias cinéticas de cada partícula

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (52)$$

vejamos primeiro o que acontece no caso de uma rotação em torno de um eixo fixo, onde $\vec{v}_i$ é dado pela (51). Nesse caso teremos

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left|\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_e)^2\right|^2 \qquad (53)$$

Sabemos que o módulo do produto vetorial vale

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\mathrm{sen}(\theta_{ab}) \qquad (54)$$

onde θ_{ab} é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Vemos portanto na (53) que a energia cinética vai depender do ângulo entre o eixo $\vec{\omega}$ e a distância relativa $\vec{r}_i - \vec{r}_e$

$$|\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_e)|^2 = \omega^2 \, |\vec{r}_i - \vec{r}_e|^2 \, \mathrm{sen}\, \theta_{\omega, r_i - r_e} \qquad (55)$$

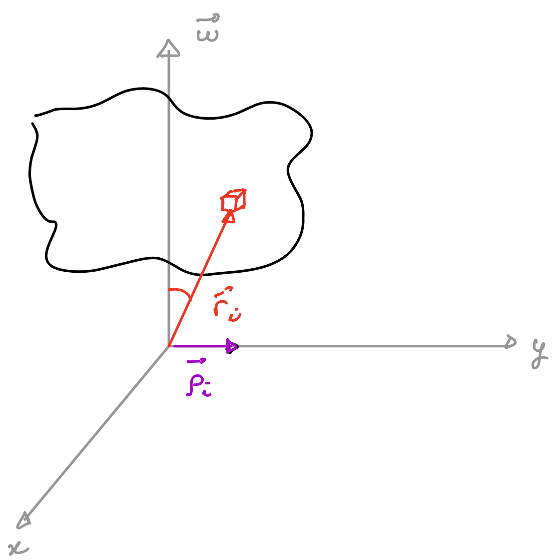
Escrever o resultado desse jeito não é muito conveniente.

É melhor usar a seguinte representação.

Podemos, sem perda de generalidade, supor que $\vec{\omega}$ é ao longo da direção z. Dado qualquer vetor $\vec{r}$, podemos então sempre decompô-lo na forma

$$\vec{r} = \vec{\rho}_r + \vec{z}_r \tag{56}$$

onde $\vec{z}_r$ é a componente z do vetor $\vec{r}$ e $\vec{\rho}_r$ é a componente perpendicular à z; ou seja, no plano xy.



Com isso podemos escrever $\vec{r}_i - \vec{r}_e = \vec{\rho}_{ie} + \vec{z}_{ie}$ e, portanto

$$\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_e) = \vec{\omega} \times (\vec{\rho}_{ie} + \vec{z}_{ie}) \tag{57}$$

Mas como $\vec{z}_{ie}$ é, por definição, paralelo a $\vec{\omega}$,

$$\vec{\omega} \times \vec{z}_{ie} = 0 \tag{58}$$

Além disso, como $\vec{\rho}_{ie}$ é perpendicular a $\vec{\omega}$

$$|\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{ie}| = \omega \rho_{ie} \qquad (59)$$

(o ângulo entre eles é 90°).

A Eq. (53) se torna, portanto

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_{ie}^2 \omega^2 \qquad (60)$$

Como ω não depende de i, podemos definir o momento de inercia

$$I_e = \sum_i m_i \rho_{ie}^2 \qquad (61)$$

calculado com relação ao eixo de rotação na posição $\vec{r}_e$.

e portanto chegamos novamente a um resultado familiar

$$K = \frac{1}{2} I_e \omega^2 \qquad (62)$$

Isso vale apenas para rotações em torno de um eixo fixo. O sufixo "e" em Ie serve para enfatizar que é o momento de inercia com relação a um eixo localizado no ponto $\vec{r}_e$.

Vejamos agora o que acontece no caso de uma rotação geral, onde $\vec{v}_i$ é dado pela Eq. (32). Nesse caso a energia cinética se torna

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{v}_i|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ |v_{CM}|^2 + |\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,CM}|^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,CM}) \right\} \quad (63)$$

O 1º termo será simplesmente a energia cinética do CM:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i v_{CM}^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad (64)$$

Já no 2º termo teremos algo parecido com o que tínhamos antes. A diferença é que aparece o vetor $\vec{r}_{i,CM} = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$ ao invés de $\vec{r}_i - \vec{r}_o$. Portanto esse termo vai fornecer um momento de inércia como o da (61), mas calculado em relação ao CM. Ou seja

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,CM}|^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (65)$$

onde

$$I_{CM} = \sum_i m_i \rho_{i,CM}^2 \quad (66)$$

A Eq. (63) se torna, portanto

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,CM}) \tag{67}$$

Para trabalharmos esse último termo, usamos uma propriedade de produtos vetoriais

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{68}$$

É como se pudéssemos rodar ciclicamente os vetores. Com isso podemos escrever

$$\sum_i m_i \vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,CM}) = \sum_i m_i \vec{r}_{i\,CM} \cdot (\vec{v}_{CM} \times \vec{\omega}) \tag{69}$$

O termo $\vec{v}_{CM} \times \vec{\omega}$ agora não depende de i. Ou seja, podemos colocar um grande parêntese

$$\sum_i m_i \vec{r}_{i,CM} \cdot (\vec{v}_{CM} \times \vec{\omega}) = \left(\sum_i m_i \vec{r}_{i,CM} \right) \cdot (\vec{v}_{CM} \times \vec{\omega}) \tag{70}$$

Mas essa grandeza entre parênteses é

$$\sum_i m_i \vec{r}_{i,cm} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{M\vec{R}_{cm}} - \underbrace{\sum_i m_i}_{M} \vec{R}_{cm}$$

$$= 0 \tag{71}$$

Portanto, todo o último termo em (67) é nulo e concluímos finalmente que

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \tag{72}$$

Essa é a energia cinética geral de um sólido. Ela vale para qualquer tipo de movimento do sólido. Note como o que aparece é I_{cm}, o momento de inercia calculado com relação ao CM. Isso independentemente de qual eixo esteja ocorrendo a rotação.

Mas e a Eq. (62) para rotação em torno de um eixo fixo? Ela tem que ser um caso particular da (72), que é geral. Podemos recuperar a (62) usando a (49)

$$d\vec{R}_{cm} = d\vec{\phi} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{r}_e)$$

ou

$$\vec{v}_{cm} = \vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{r}_e) \tag{73}$$

Com isso

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 h^2 \tag{74}$$

onde

$$h_e^2 = |\vec{\rho}_{CM} - \vec{\rho}_e|^2 \tag{75}$$

é a distância entre o CM e o eixo e. A Eq. (72) se torna então

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 h^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(I_{CM} + M h_e^2 \right) \omega^2$$

Mas pelo teorema dos eixos paralelos

$$I_{CM} + M h_e^2 = I_e$$

e portanto chegamos na (62)

$$K = \frac{1}{2} I_e \omega^2$$

Resumo

Para resumir, a velocidade de um ponto qualquer de um sólido sempre pode ser decomposta como

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i,CM}$$

onde $\vec{\omega}$ é um vetor de rotação arbitrário e $\vec{r}_{i,CM} = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$.

Desse resultado podemos derivar casos particulares como, por exemplo, a rotação em torno de um eixo fixo, onde

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_e)$$

sendo $\vec{r}_e$ a posição do eixo $\vec{\omega}$.

A energia cinética geral será

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

onde I_{CM} é o momento de inercia calculado em torno de um eixo $\vec{\omega}$ que passa pelo CM. No caso de rotação em torno de um eixo fixo isso reduz para

$$K = \frac{1}{2} I_e \omega^2$$

onde I_e é o momento de inercia calculado em torno do eixo $\vec{\omega}$ que passa por um certo ponto $\vec{r}_e$.