Cálculo diferencial e integral

(A matemática das coisas pequenas)

Como vimos na última aula, a taxa de variação de uma função $x(t)$, chamada de derivada da função, é definida como

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad (1)$$

É importante entender o que significa o "$\lim_{\Delta t \to 0}$". O segredo para o sucesso é sempre carregar o Δt contigo, lembrando que Δt é muito pequeno mas diferente de zero. Aí, só no final, você pode tomar $\Delta t \to 0$. A expressão "$\lim_{\Delta t \to 0}$" é a última etapa da Eq. (1).

Considere, por exemplo, a função $x(t) = 1/t$. Nesse caso

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{t+\Delta t} - \frac{1}{t}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\cancel{t} - \cancel{t} - \Delta t}{t(t+\Delta t)}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{-\Delta t}{t(t+\Delta t)}\right]$$

$$= \frac{-1}{t(t+\Delta t)} \qquad (2)$$

Carregamos o Δt até o final. Agora estamos prontos para tomar o limite $\Delta t \to 0$. Nesse caso temos $t + \Delta t$ no denominador, então quando Δt for ultra pequeno

$$t + \Delta t \approx t$$

(O símbolo $\approx$ significa "aproximadamente igual"). Assim, da Eq (2) obtemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{t^2}$$

(3)

Portanto

$$\frac{d}{dt}(1/t) = -\frac{1}{t^2}$$

Bacana!

Existem alguns outros símbolos para derivada que vale a pena conhecer também:

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}(t) \qquad (4)$$

Em geral só usado por físicos.

A ideia é simplesmente ter uma notação mais compacta.

A segunda derivada de uma função é a derivada da derivada

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = x''(t) = \ddot{x}(t) \qquad (5)$$

Ela será, portanto, dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x'(t+\Delta t) - x'(t)}{\Delta t} \qquad (6)$$

É possível escrever essa expressão em termos de $x(t)$. Por exemplo, podemos escrever

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\overbrace{\left(\frac{x(t+2\Delta t) - x(t+\Delta t)}{\Delta t}\right)}^{x'(t+\Delta t)} - \overbrace{\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)}^{x'(t)}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+2\Delta t) - 2x(t+\Delta t) + x(t)}{\Delta t^2} \qquad (7)$$

Essa expressão está perfeitamente correta. Mas ela é meio feia. A coisa toda deslizou demais para um dos lados. É possível escrever $\ddot{x}$ de uma forma mais simétrica. Na última aula discutimos como a posição do intervalo $[t, t+\Delta t]$ não era importante. Por exemplo

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad \text{Derivada para frente} \qquad (8a)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} \qquad \text{Derivada para trás} \qquad (8b)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t} \qquad \text{Derivada centrada} \qquad (8c)$$

Todas essas expressões são equivalentes. Podemos usar isso na Eq (7). Por exemplo, usamos uma derivada para trás tanto em $x'(t+\Delta t)$ quanto em $x'(t)$:

$x'(t+\Delta t)$ derivada p/ trás [Eq.(8b)]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right) - \left(\frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}\right)\right]$$

Isso leva então à expressão mais simétrica

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \qquad (9)$$

Exercício: Calcule $\frac{d^2}{dt^2}(t^2)$ usando a Eq. (9).

Sabemos que $\frac{d}{dt}(t^2) = 2t$ e portanto

$$\frac{d^2}{dt^2}(t^2) = \frac{d}{dt}(2t) = 2$$

Por outro lado, da Eq. (9) temos

$$\frac{d^2}{dt^2}(t^2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^2 - 2t^2 + (t-\Delta t)^2}{\Delta t^2}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{t^2} + \cancel{2t\Delta t} + \Delta t^2 - \cancel{2t^2} + \cancel{t^2} - \cancel{2t\Delta t} + \Delta t^2}{\Delta t^2}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta t^2}{\Delta t^2}$$

$$= 2$$

Exercício: (a) Calcule $\frac{d}{dt}(-1/t^2)$

(b) Calcula $\frac{d^2}{dt^2}(1/t)$ usando a Eq (9).

Devido a Eq. (3) ambos devem coincidir

Solução: (a) Tomando $y = -1/t^2$

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{-1}{(t+\Delta t)^2} + \frac{1}{t^2} \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{-t^2 + (t+\Delta t)^2}{t^2(t+\Delta t)^2} \right]$$

$$= \frac{2t + \Delta t}{t^2(t+\Delta t)^2}$$

Tomando $\Delta t \to 0$, posso aproximar $2t + \Delta t \approx 2t$ e $t + \Delta t \approx t$. Portanto

$$\frac{d}{dt}(-1/t^2) = \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3} \qquad (10)$$

(b) Usando a Eq. (9) com $x = 1/t$ obtemos

$$\frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{1}{\Delta t^2}\left[\frac{1}{t+\Delta t} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t-\Delta t} \right]$$

Combinamos 1º

$$\frac{1}{t+\Delta t} + \frac{1}{t-\Delta t} = \frac{t - \Delta t + t + \Delta t}{t^2 - \Delta t^2} = \frac{2t}{t^2 - \Delta t^2}$$

Portanto

$$\frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{1}{\Delta t^2}\left[\frac{2t}{t^2-\Delta t^2} - \frac{2}{t}\right]$$

$$= \frac{2}{\Delta t^2}\left[\frac{t^2 - t^2 + \Delta t^2}{t(t^2-\Delta t^2)}\right]$$

$$= \frac{2}{t(t^2-\Delta t^2)}$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$ obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}(1/t) = \frac{2}{t^3}$$

que coincide com a Eq. (10).

O teorema binomial

Considere a seguinte expansão

$$(1+y)^2 = 1 + 2y + y^2$$

ou

$$(1+y)^3 = 1 + 3y + 3y^2 + y^3$$

e assim por diante. A generalização disso para qualquer potência é chamada de teorema binomial e lê-se

$$(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^3 + \dots \qquad (11)$$

onde, lembrando, "!" significa fatorial:

$$2! = 2$$

$$3! = 3 \times 2 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

etc. A expansão em (11) vai até o termo que se anula.

Então, por exemplo

$$(1+y)^2 = 1 + (2)y + \frac{(2)(2-1)}{2!}y^2 + \overset{0}{\frac{2(2-1)(2-2)}{3!}y^3}$$

$$= 1 + 2y + y^2$$

e

$$(1+y)^3 = 1 + 3y + \frac{3(3-1)}{2!}y^2 + \overbrace{\frac{3(3-1)(3-2)}{3!}}^{\frac{3\times 2\times 1}{3\times 2}=1} y^3 + \frac{3(3-1)(3-2)\overbrace{(3-3)}^{0}}{4!}y^4$$

$$= 1 + 3y + 3y^2 + y^3 \quad ✓$$

A Eq. (11) pode ser usada para calcularmos a derivada de $x = t^n$ onde n é uma potência qualquer. Na última aula vimos que

$$\frac{d}{dt}(1) = 0 \tag{12a}$$

$$\frac{d}{dt}(t) = 1 \tag{12b}$$

$$\frac{d}{dt}(t^2) = 2t \tag{12c}$$

$$\frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2 \tag{12d}$$

Claramente da para advinhar o que vai acontecer. Quando derivamos t^n, cai um fator n e sobramos com t^{n-1}:

$$\frac{d}{dt}(t^n) = n\,t^{n-1} \tag{13}$$

Vamos agora mostrar, usando o teorema binomial, que isso de fato é verdade. Para isso usamos a definição de derivada

$$\frac{d}{dt}(t^n) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} \qquad (14)$$

Precisamos calcular $(t+\Delta t)^n$. O truque é escrever isso como

$$(t+\Delta t)^n = \left(t\left(1+\frac{\Delta t}{t}\right)\right)^n$$

$$= t^n \underbrace{\left(1+\Delta t/t\right)^n}_{\text{está no formato do teorema binomial}}$$

Aplicando o teorema binomial no segundo termo, obtemos então

$$(t+\Delta t)^n = t^n \left[1 + n(\Delta t/t) + \frac{n(n-1)}{2!}(\Delta t/t)^2 + \cdots\right] \qquad (15)$$

Note como os termos da expansão envolvem potências cada vez maiores de Δt. Como queremos Δt pequeno, esses termos rapidamente se tornarão desprezíveis. Sobramos então com

$$(t+\Delta t)^n = t^n + t^n n(\Delta t/t) + t^n \frac{n(n-1)}{2!}(\Delta t/t)^2 + \cdots$$

$$= t^n + n t^{n-1} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \qquad (16)$$

termos com potência pelo menos Δt^2

O que nós estamos fazendo aqui chama-se expansão em série de potências. Como Δt é pequeno, cada termo da série será menor que o anterior. A notação $\mathcal{O}(\Delta t)^2$ significa que a parte que não escrevemos tem, pelo menos Δt^3 como "ordem de pequenice". Ela terá, também Δt^2, Δt^3, etc.

Agora plugamos isso na expressão para a derivada

$$\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} = n\, t^{n-1} + \frac{\mathcal{O}(\Delta t)^2}{\Delta t} \tag{17}$$

O último termo contém potências pelo menos com Δt^2, mas divididas por Δt. Portanto

$$\frac{\mathcal{O}(\Delta t)^2}{\Delta t} = \mathcal{O}(\Delta t)$$

Esse último termo todo, portanto, vai a zero quando $\Delta t \to 0$. Assim, a única coisa que sobra é

$$\frac{d}{dt}(t^n) = n\, t^{n-1} \tag{18}$$

Teorema binomial para n arbitrário

O que é incrível do teorema binomial (11) é que ele continua válido para qualquer valor de n, como $n = -1$, $1/2$ ou 3,3. Isso não é nem um pouco óbvio. Considere, por exemplo, a função $\frac{1}{1+y}$. Isso tem o formato de (11) com $n = -1$. Teremos, portanto,

$$\frac{1}{1+y} = 1 + (-1)y + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}y^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}y^3 + \dots$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 \dots \tag{19}$$

Isso é conhecido como série geométrica. Ao contrário do teorema (11), essa é uma série infinita. Ou seja, ela terá a princípio, um número infinito de termos.

Para você ter uma ideia, considere por exemplo, $y = 1/4$. Neste caso teremos

$$\frac{1}{1 + 1/4} = 0{,}8$$

Por outro lado, usando (19) com diferentes números de termos, obtemos

nº de termos	1	2	3	4	5	6
valor	1	0,75	0,8125	0,7968	0,7998	0,800049

onde, por exemplo, "2 termos" significa $1-y$ e 3 termos significa $1-y+y^2$, etc. Como você pode ver, a série de potências converge para $1/(1+y)$ conforme aumentamos o número de termos.

O fato de que a Eq (11) vale para qualquer n significa que a fórmula (18) para a derivada de t^n é, na verdade, mais geral. Por exemplo, na Eq (3) vimos que

$$\frac{d}{dt}(1/t) = -1/t^2.$$

Isso se enquadra na Eq. (18) com $n=1$.

Outro exemplo é

$$\frac{d}{dt}(t^{1/2}) = (1/2)\, t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{t^{1/2}}$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{t}} \qquad (20)$$

Série de Taylor

Existe um teorema muito muito útil em cálculo, devido a Taylor. O teorema diz que dada qualquer função $x(t)$, sempre podemos expandir $x(t+\Delta t)$ numa série de potencias em Δt. Além disso, essa expansão tem a seguinte forma:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}\Delta t^3 + \dots \quad (21)$$

Ou seja, os coeficientes de Δt^n é a n-ésima derivada (com um fator de $1/n!$). O teorema de Taylor vale para qualquer Δt, não necessariamente infinitesimal. Ele fornece, portanto, uma maneira sistemática de calcular aproximações para certas funções.

Mostrar rigorosamente o teorema de Taylor não é tão fácil. Mas é fácil se convencer que ele faz sentido. Por exemplo, passando o $x(t)$ para o lado esquerdo e dividindo por Δt obtemos

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + \dots \quad (22)$$

Se agora tomamos o limite $\Delta t \to 0$, no lado direito o único termo que sobrevive é o 1º. Ou seja, obtemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (23)$$

que é exatamente a definição de derivada. Ou seja, o teorema é consistente.

Da mesma forma, podemos fazer sentido da 2ª derivada multiplicando Δt^2. Para isso usamos a Eq. (9). Primeiro escrevemos $x(t-\Delta t)$ usando a Eq. (21). Basta trocar $\Delta t \to -\Delta t$:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}\Delta t^3 + \dots \quad (24a)$$

$$x(t-\Delta t) = x(t) - \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}\Delta t^3 + \dots \quad (24b)$$

Agora plugamos isso na Eq (9). Ou seja, calculamos

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t) &= x(t+\Delta t) - x(t) + \\ &\quad + x(t-\Delta t) - x(t) \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{2}{4!}\frac{d^4x}{dt^4}\Delta t^4 + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Finalmente, dividimos por Δt^2, obtendo

$$\frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{4!}\frac{d^4x}{dt^4}\Delta t^2 + \dots \quad (26)$$

Agora vemos que no limite $\Delta t \to 0$, só sobrevive d^2x/dt^2 no lado direito. Portanto

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (27)$$

que nada mais é do que a Eq. (9). Isso mostra novamente como a série de Taylor (21) é consistente.

Em seguida, vejamos como o teorema de Taylor leva ao teorema binomial (11). Considere a função $x = t^m$. Sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = m\,t^{m-1} \tag{28a}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m(m-1)\,t^{m-2} \tag{28b}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = m(m-1)(m-2)\,t^{m-3} \tag{28c}$$

Usando a Eq. (21) obtemos portanto

$$(t+\Delta t)^m = t^m + m t^{m-1}\Delta t + \frac{m(m-1)}{2!} t^{m-2}\Delta t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} t^{m-3}\Delta t^3 + \dots \tag{29}$$

Essa é exatamente a Eq (15). Se tomamos, em particular, $t=1$, obtemos a Eq. (11):

$$(1+\Delta t)^m = 1 + m\Delta t + \frac{m(m-1)\Delta t^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)\Delta t^3}{3!} + \dots \tag{30}$$

Essa expressão é muito útil para calcularmos certas aproximações. Por exemplo, se Δt é muito pequeno a Eq. (30) diz que

$$(1+\Delta t)^m \approx 1 + m\Delta t \tag{31}$$

Então, por exemplo

$$\sqrt{1+\Delta t} \approx 1 + \frac{\Delta t}{2} \qquad (\text{quando } \Delta t \ll 1) \tag{32}$$

Integral

Integral é a operação inversa da derivada. Por exemplo

$$\frac{d}{dt}(t^2) = 2t \tag{32}$$

Agora considere a pergunta: qual a função $x(t)$ cuja derivada é $2t$? Resposta: $x = t^2$. Escrevemos isso matematicamente como

$$\int dt \; 2t = t^2 \tag{33}$$

O símbolo $\int$ lembra um S de soma. Ele sempre vai junto do "dt". Você nunca verá o $\int$ sozinho. A notação $\int dt$, portanto, é só uma forma matemática de dizermos "integral".

A Eq. (33), no entanto, não está 100% correta. O motivo é que tem mais de uma função $x(t)$ que tem a mesma derivada $2t$, já que a derivada de uma constante é zero. Por exemplo

$$\frac{d}{dt}(t^2 + 42) = 2t \tag{34}$$

o que vale para qualquer constante.

Portanto, a forma correta de escrever a Eq. (33) é

$$\int dt \; 2t = t^2 + c \tag{35}$$

onde c é uma constante que só pode ser determinada por outros meios (veremos exemplos abaixo).

Você deve estar se perguntando como que sabemos que a integral de $2t$ é t^2. Esse é um problema inverso: eu só sei que isso é verdade pois eu sei que a derivada de t^2 é $2t$. Por esse motivo, integrais são muito mais complicadas que derivadas. Vejamos alguns exemplos:

Ex: $\int dt\, t = \frac{t^2}{2} + c$

$$\int dt\, a = at + c \qquad \text{(onde } a \text{ é constante)}$$

$$\int dt\, t^2 = \frac{t^3}{3} + c$$

etc. Em todos os exemplos, eu só consegui calcular a integral pois eu já sabia a derivada. Ou seja, eu sabia que

$$\frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2$$

então eu ajustei o fator de $1/3$ para dar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3}\right) = t^2$$

Ou seja, $t^3/3$ é a integral de t^2 pois a derivada de $t^3/3$ vale t^2. Para terminar eu adicionei a constante c.

Posição, velocidade e aceleração

Como vimos na última aula, a velocidade é a derivada da posição

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{36}$$

e a aceleração é a derivada da velocidade

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{37}$$

Agora que sabemos o conceito de integral, podemos realizar o caminho oposto: dado $a(t)$, quanto vale $v(t)$ e $x(t)$? Essa pergunta, na verdade, é muito mais importante, como veremos no decorrer do curso.

A velocidade é obtida da aceleração integrando uma vez

$$v(t) = \int dt\, a(t) \tag{38}$$

Por exemplo, se $a(t) = a$ = constant (aceleração uniforme) obtemos

$$v(t) = at + C \tag{39}$$

Isso agora mostra claramente quem deve ser a constante C. Ela representa a velocidade inicial do sistema

Se em $t=0$ temos $v(0)=v_0$, então

$$v_0 = 0 + c \rightsquigarrow c = v_0 \tag{40}$$

e portanto recuperamos a equação usual

$$v(t) = v_0 + at \tag{41}$$

Note que podíamos também ter escolhido outro instante de tempo como o inicial. Por exemplo, suponha que sabemos que $v(t_0) = v_0$ para um certo t_0. Nesse caso obtemos de (39)

$$v(t_0) = v_0 = at_0 + c \rightsquigarrow c = v_0 - at_0$$

A Eq (39) se torna, portanto,

$$v(t) = at + v_0 - at_0$$

ou

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \tag{42}$$

que também havíamos discutido na última aula.

Em seguida, podemos obter a posição como uma integral da velocidade:

$$x(t) = \int dt \; v(t) \tag{43}$$

Essa fórmula é geral. No caso da Eq. (41), por exemplo, obtemos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int dt\,(v_0 + at) \\
&= v_0 t + \frac{at^2}{2} + c'
\end{aligned}
\tag{44}
$$

onde c' é outra constante. Novamente, se tomamos $x(0) = x_0$, obtemos

$$
x_0 = 0 + 0 + c' \Longrightarrow c' = x_0 \tag{45}
$$

o que leva a

$$
x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{46}
$$

Por outro lado, podemos supor que $v(t)$ é dado por (42). Nesse caso a Eq (43) fornece

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int dt\,\left[v_0 + a(t - t_0)\right] \\
&= v_0 t + \frac{at^2}{2} - a t_0 t + c'
\end{aligned}
\tag{47}
$$

já que $a t_0$ é uma constante. Se colocamos $x(t_0) = x_0$, então

$$
x_0 = v_0 t_0 + \underbrace{\frac{a t_0^2}{2} - a t_0^2}_{-\frac{a t_0^2}{2}} + c' \tag{48}
$$

Portanto

$$c' = x_0 - v_0 t_0 + \frac{a t_0^2}{2} \tag{49}$$

Assim, a Eq. (47) se torna

$$x(t) = v_0 t + \frac{a t^2}{2} - a t_0 t + x_0 - v_0 t_0 + \frac{a t_0^2}{2}$$

Podemos agrupar os termos, levando a

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \tag{50}$$

que é a generalização da Eq. (46) para o caso onde o movimento se inicia em t_0, ao invés de 0.