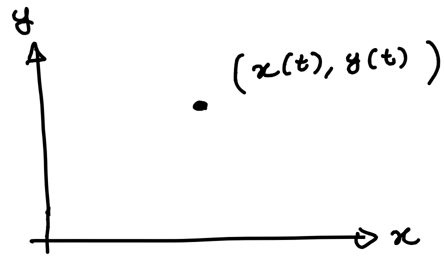
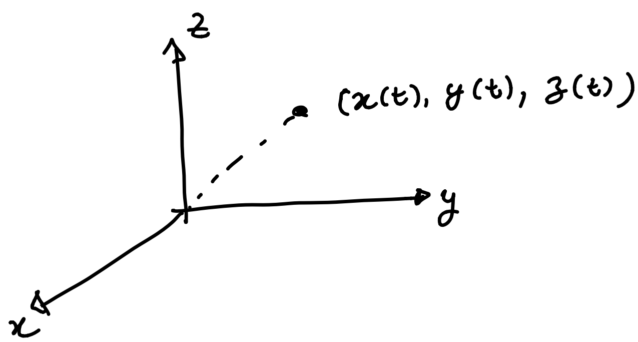
Vetores e movimento em duas dimensões

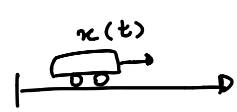
Nas aulas anteriores descrevemos a posição de uma partícula através da função $x(t)$. Quando o movimento ocorre em duas dimensões, devemos especificar duas coordenadas. Por exemplo:



Ou seja, especificamos as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$. Em 3 dimensões serão 3 coordenadas



Todo movimento na realidade é em 3D. Nos problemas que tratamos na aula anterior, o que acontecia é que as outras duas coordenadas evoluiam de forma trivial. Por exemplo, se temos uma partícula se movendo horizontalmente com $x(t)$, na verdade temos

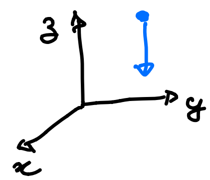


$$(x(t), y_0, z_0)$$

Ou seja, $x(t)$ está mudando enquanto y_0 e z_0 estão fixos.

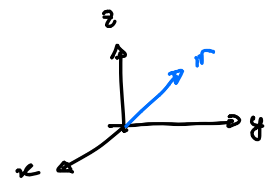
Da mesma forma, uma partícula em queda livre terá coordenadas

$$(x_0, y_0, z(t))$$



O conjunto das três coordenadas (x, y, z) define um vetor (ou vetor posição)

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

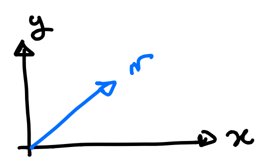


(1)

Para denotar um vetor, usamos a letra em negrito ($\mathbf{r}$ ao invés de r) ou também uma flecha $\vec{r}$. Ambos significam a mesma coisa.

Em alguns casos, por simplicidade, pensaremos em vetores em apenas duas dimensões

$$\mathbf{r} = (x, y)$$



(2)

O conceito de vetores é fundamental na mecânica. Posição, velocidade, aceleração, são todos vetores. Precisamos, portanto, se acostumar com essa ideia e aprender algumas das propriedades dos vetores.

Soma de vetores: A soma de dois vetores é definida componente a componente: se

$$r_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$r_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

então

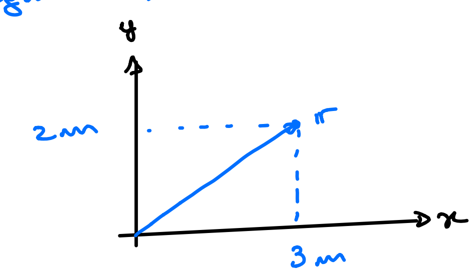
$$r_1 + r_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) \tag{3}$$

Multiplicação por um escalar: "escalar" é um jeito chique de dizer "número". Multiplicar um vetor por um escalar é o mesmo que multiplicar cada uma de suas componentes. Por exemplo

$$2r = (2x,\ 2y,\ 2z) \tag{4}$$

Nós usamos o termo escalar para contrastar com o termo vetor. O escalar é apenas um número enquanto que o vetor é uma coleção de números. Nós nunca multiplicamos dois vetores. Apenas multiplicamos um escalar por um vetor.

Módulo (magnitude) do vetor: considere o seguinte vetor



A que distância está o ponto r da origem? A resposta é dada pelo teorema de Pitágoras

$$\text{distância} = \sqrt{3^2 + 2^2}$$

É essa distância que definimos como o módulo do vetor. Dado um vetor $\mathbf{r} = (x,y)$, escrevemos

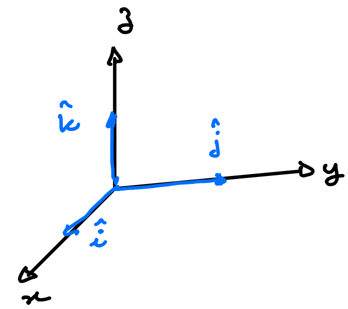
$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2} \tag{4}$$

Note que $\mathbf{r}$ é um vetor, mas $|\mathbf{r}|$ é um número. Em 3D temos a mesma coisa:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{5}$$

Vetores unitários: existem alguns vetores que aparecem com muita frequência e portanto recebem uma notação especial. São eles

$$\hat{i} = (1,0,0)$$
$$\hat{j} = (0,1,0) \tag{6}$$
$$\hat{k} = (0,0,1)$$



Esses vetores ganham um chapéu pois tem módulo 1:

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1 \tag{7}$$

Vetores com módulo 1 são chamados "unitários"; eles vem com chapéu.

Devido às propriedades (3) e (4), sempre podemos escrever um vetor como

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{8}$$

Basta checar que funciona:

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = (x,y,z).$$

Dado qualquer vetor $\mathbf{r}$, sempre podemos reescalá-lo para que ele se torne unitário. Para tal, basta dividir pelo módulo

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{9}$$

Vamos checar que isso funciona: temos, da Eq. (5)

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Além disso

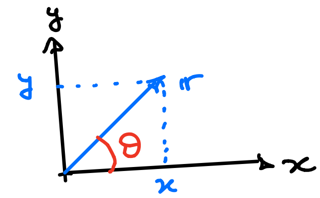
$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{|\mathbf{r}|}(x, y, z) = \left(\frac{x}{|\mathbf{r}|}, \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \frac{z}{|\mathbf{r}|}\right)$$

Portanto

$$|\hat{\mathbf{r}}| = \sqrt{\frac{x^2}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{y^2}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{z^2}{|\mathbf{r}|^2}} = \frac{1}{|\mathbf{r}|}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} = 1$$

Ou seja, de fato, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ é um vetor unitário.

Ângulos: considere um vetor em 2D:



O ângulo que $\mathbf{r}$ faz com o eixo x será dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|\mathbf{r}|} \quad \text{ou} \quad \cos\theta = \frac{x}{|\mathbf{r}|} \tag{10}$$

Dividindo um pelo o outro, obtemos

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \tag{11}$$

Portanto

$$\theta = \operatorname{atan}(y/x) \tag{12}$$

onde "atan" é o arco tangente; ou seja, a função inversa da tangente.

Nós podemos também usar a Eq. (10) para escrever

$$\begin{aligned} x &= |\mathbf{r}|\cos\theta \\ y &= |\mathbf{r}|\sin\theta \end{aligned} \tag{13}$$

Dessa forma, vemos que qualquer vetor $\mathbf{r}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = (x, y) = |\mathbf{r}|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \tag{14}$$

Ou seja, decompomos o vetor $\mathbf{r}$ em seu módulo vezes um vetor unitário

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\operatorname{sen}\theta \tag{15}$$

Velocidade e aceleração vetoriais

O movimento de uma partícula no espaço é descrito pelo vetor posição:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{16}$$

O deslocamento percorrido entre os intervalos t e $t+\Delta t$ será, portanto,

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) = \big(x(t+\Delta t) - x(t),\ y(t+\Delta t) - y(t),\ z(t+\Delta t) - z(t)\big)$$

Dessa forma, é natural definir a velocidade vetorial como

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \tag{17}$$

Ou, em componentes

$$\mathbf{v}(t) = (v_x, v_y, v_z) = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k} \tag{18}$$

onde

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{19}$$

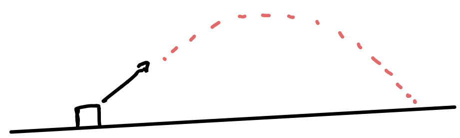
Com a aceleração é a mesma coisa:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k} \tag{20}$$

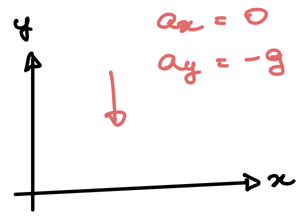
Ou seja, a moral da história é que tudo que vimos antes continua válido, mas agora se aplica componente a componente.

Lançamento de projéteis

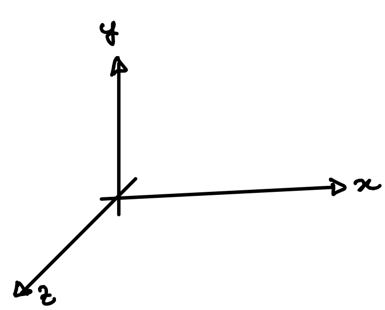
Como uma aplicação dessas ideias, vamos considerar o lançamento de projéteis. O movimento ocorre apenas em 2D



Portanto, basta considerarmos um referencial em 2D. Eu vou escolher um referencial com o eixo x horizontal e o eixo y alinhado com a aceleração da gravidade



Se você quiser, você pode imaginar que há um outro eixo saindo para fora do papel



Mas como todo o movimento ocorre no plano xy, não precisamos se preocupar com o eixo z.

consideramos um movimento que tem aceleração nula na horizontal e aceleração constante $a_y = -g$ na vertical. O vetor aceleração será, portanto

$$\mathbf{a} = -g\,\hat{j} = (0, -g, 0) \tag{21}$$

(ou $\mathbf{a} = (0, -g, 0)$ se preferir). Para obter a velocidade integramos uma vez. E fazemos isso componente a componente:

$$v_x(t) = \int dt\, a_x = \int dt\, 0 = \text{constant} := v_{0x} \tag{22}$$

Ou seja, como a aceleração $a_x = 0$, a partícula deverá se mover com velocidade constante nessa direção.

Já na direção y temos

$$v_y = \int dt\, a_y = \int dt\,(-g) = -g t + v_{0y} \tag{23}$$

Portanto, o vetor velocidade será

$$\mathbf{v}(t) = v_{0x}\,\hat{i} + (v_{0y} - g t)\,\hat{j} \tag{24}$$

Em seguida, integramos mais uma vez para encontrar $\mathbf{r}(t)$.

A componente x será

$$x(t) = \int dt\, v_{0x} = v_{0x} t + x_0 \tag{25}$$

Já a componente y será

$$y(t) = \int dt\, (v_{0y} - g t) = v_{0y} t - \frac{g t^2}{2} + y_0 \tag{26}$$

Portanto, o vetor posição será dado por

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} && (27a)\\ x(t) &= x_0 + v_{0x} t && (27b)\\ y(t) &= y_0 + v_{0y} t - \frac{g t^2}{2} && (27c) \end{aligned}}$$

Podemos também escrever esse resultado de forma 100% vetorial.

Definimos o vetor posição em $t = 0$

$$\mathbf{r}_0 = x_0\,\hat{i} + y_0\,\hat{j} \tag{28}$$

e o vetor velocidade em $t = 0$,

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\,\hat{i} + v_{0y}\,\hat{j} \tag{29}$$

Com isso, e usando também o vetor aceleração

$$\mathbf{a} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$$

podemos escrever a Eq. (27) na forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \frac{\mathbf{a}\, t^2}{2} \tag{30}$$

Se isso parece suspeito, basta abrir a expressão para nos convencermos

$$\mathbf{r}(t) = \left[x_0\,\hat{\mathbf{i}} + y_0\,\hat{\mathbf{j}}\right] + \left[v_{0x}\, t\,\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\, t\,\hat{\mathbf{j}}\right] + \left[-\frac{g t^2}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\right]$$

Agora agrupamos tudo que tem $\hat{\mathbf{i}}$ e tudo que tem $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\mathbf{r}(t) = \underbrace{\left[x_0 + v_{0x}\, t\right]}_{x(t)}\hat{\mathbf{i}} + \underbrace{\left[y_0 + v_{0y}\, t - \frac{g t^2}{2}\right]}_{y(t)}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

A Eq. (30) fornece, portanto, uma forma mais compacta e mais robusta de escrever o movimento na forma vetorial.

A Eq. (27) ou (30) descreve a trajetória 2D de uma partícula sob a ação da gravidade. Ela vale, no entanto, para qualquer posição e velocidade iniciais. Vejamos alguns exemplos.

Ex (básico): O projétil começa da origem, $\mathbf{r}_0 = 0$. Nesse caso

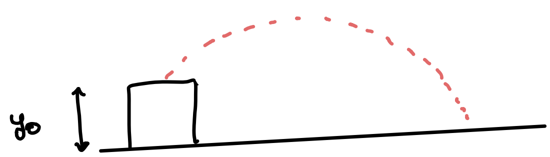
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a} t^2}{2} \tag{31}$$

ou, em componentes

$$x(t) = v_{0x} t \tag{32a}$$

$$y(t) = v_{0y} t - \frac{g t^2}{2} \tag{32b}$$

Ex: o projétil é lançado de uma plataforma

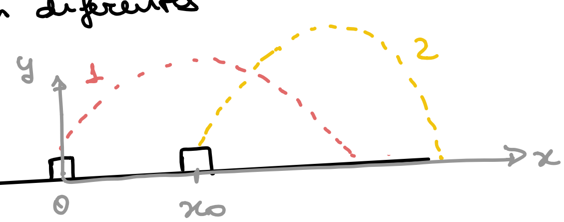


$\mathbf{r}_0 = (0, y_0)$

$$x(t) = v_{0x} t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{g t^2}{2}$$

Ex: dois projéteis são lançados de posições horizontais diferentes



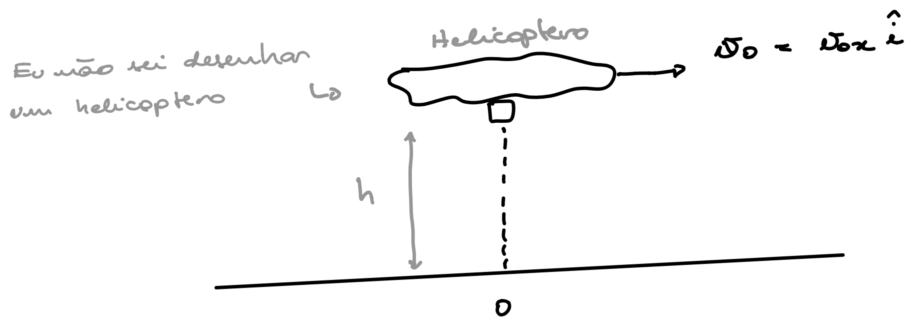
Supondo que ambos são lançados ao mesmo tempo e com a mesma velocidade, temos

$$\mathbf{r}_1(t) = \left[v_{0x}\, t \right] \hat{i} + \left[v_{0y}\, t - \frac{g\, t^2}{2} \right] \hat{j}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \left[x_0 + v_{0x}\, t \right] \hat{i} + \left[v_{0y}\, t - \frac{g\, t^2}{2} \right] \hat{j}$$

Podíamos também escolher velocidades iniciais diferentes ou lançá-los em instantes iniciais diferentes. Eu deixo como exercício para você escrever as equações horárias nesses casos.

Ex: O projétil é lançado de um helicoptero.



O helicoptero se move com velocidade v_0 horizontal. Portanto essa será a velocidade inicial do pacote. Já a posição inicial, escolhendo, $x=0$ como o ponto do lançamento, será $\mathbf{r}_0 = (0, h)$, onde h é a altura do helicoptero.

As equações horárias serão, portanto

$$x(t) = v_{0x} t$$

$$y(t) = h - \frac{g t^2}{2}$$

Os exemplos acima ilustram a grande quantidade de problemas interessantes que podemos estudar usando o lançamento de projéteis. Em todos os problemas, o primeiro passo é sempre escolher um referencial e escrever as equações horárias para o vetor $\mathbf{r}(t)$.

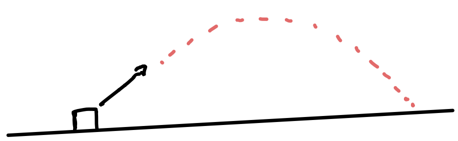
Mais sobre o lançamento básico

Vamos agora explorar em mais detalhe o caso básico de um lançamento a partir da origem. Das Eqs (32) temos

$$x(t) = v_{0x}\, t \tag{32a}$$

$$y(t) = v_{0y}\, t - \frac{g t^2}{2} \tag{32b}$$

Se $v_{0x} = 0$ o lançamento será vertical; ou seja, $x(t) = 0$. Caso contrário, o lançamento terá a forma de uma parábola.



Vamos encontrar, por exemplo, o tempo t^* em que o projétil toca novamente o solo. "Tocar o solo" significa $y = 0$. Portanto, temos da Eq. (32b)

$$0 = v_{0y}\, t - \frac{g t^2}{2}$$

Essa é uma equação quadrática para t

$$-\frac{g t^2}{2} + v_{0y}\, t = 0$$

$$t^2 - \frac{2 v_{0y}}{g}\, t = 0$$

Fatorando um dos t's:

$$t\left(t - \frac{2v_{oy}}{g}\right) = 0 \tag{33}$$

Por ser quadrática, essa equação possui 2 soluções. A $t=0$

e

$$t' = \frac{2v_{oy}}{g} \tag{34}$$

Essas duas soluções representam, portanto, os dois instantes de tempo onde $y=0$ (a partícula toca o solo).

É interessante notar como t' não depende de v_{ox}. A velocidade horizontal portanto não afeta o tempo que leva para o projétil tocar o solo. Ela afeta, é claro, a distância horizontal percorrida.

Da Eq. (32a) temos

$$x(t') = v_{ox}\, t' = \frac{2 v_{ox} v_{oy}}{g} \tag{35}$$

A distância percorrida, portanto, depende tanto de v_{ox} quanto de v_{oy}.

Outra coisa que podemos calcular é a altura máxima. Derivando $y(t)$ obtemos a velocidade vertical

$$v_y(t) = v_{0y} - g t \tag{36}$$

A altura máxima ocorre quando $v_y = 0$. Isso define um instante $\tilde{t}$ dado por

$$\tilde{t} = \frac{v_{0y}}{g}. \tag{37}$$

Comparando com a (34), vemos como já era esperado, que $\tilde{t} = t^*/2$; ou seja, a altura máxima ocorre na metade do processo. A posição onde a altura será máxima vem da (32a):

$$\tilde{x} = v_{0x}\tilde{t} = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} \tag{38}$$

Como x é linear em t, temos também que $\tilde{x} = x^*/2$. Já a altura máxima vem da (32b):

$$\tilde{y} = v_{0y}\tilde{t} - \frac{g\tilde{t}^2}{2}$$

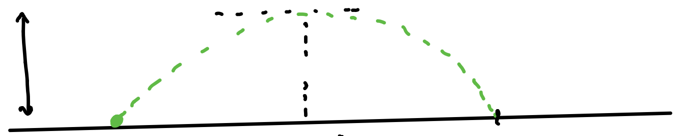
$$= \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_{0y}^2}{g^2}$$

ou seja

$$\tilde{y} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \tag{39}$$

Aqui está um diagrama resumindo alguns de nossos resultados:

$\tilde{y} = \dfrac{v_{0y}^2}{2g}$



$\tilde{x} = x^*/2$ $\qquad$ $x^* = 2 v_{0x} v_{0y}/g$

$\tilde{t} = t^*/2$ $\qquad$ $t^* = 2 v_{0y}/g$

— // —

O fato de que a trajetória do projétil descreve uma parábola pode ser visto matematicamente usando a ideia de curva paramétrica. A Eq horária (32a), (32b) fornece x e y como função do tempo. A ideia de uma curva paramétrica é eliminar t para escrever y em função de x.

Para fazer isso, usamos a (32a) para escrever

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \qquad (40)$$

Substituindo na (32b) obtemos então

$$y = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$

ou

$$y = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 \qquad (41)$$

Essa é a equação matemática de uma parábola.

Como teste de sanidade, vamos fazer novamente a pergunta de "quando e onde" o projétil toca o chão. Novamente, usando $y=0$ na Eq (37), obtemos

$$\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) x - \frac{g\, x^2}{2 v_{0x}^2} = 0$$

ou

$$x^2 - \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} x = 0$$

Isso é novamente uma equação quadrática. As soluções são $x = 0$ ou

$$x^c = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}$$

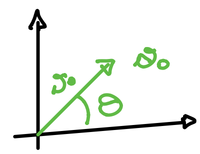
que é exatamente a Eq. (35). Note como chegamos nesse resultado por outro caminho. Antes tínhamos calculado t^c primeiro e depois $x(t^c)$. Aqui, como temos a Eq. paramétrica (37), calculamos diretamente x^c. Se quisermos t^c, podemos usar a Eq. (36).

Finalmente, é interessante também escrever a velocidade inicial na forma da Eq. (14):

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{i} + v_{0y}\,\hat{j} = v_0 \cos(\theta)\,\hat{i} + v_0 \sin(\theta)\,\hat{j} \tag{41}$$

onde

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \tag{42}$$



$$\tan\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \tag{43}$$

Desse forma, v_0 fornece a magnitude da velocidade e θ representa o ângulo com que o projétil é lançado.

Podemos reexpressar agora nossos resultados em termos de v_0 e θ. Por exemplo,

$$t^{*} = \frac{2 v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0}{g} \sin\theta \tag{44}$$

$$x^{*} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta$$

Podemos usar a identidade trigonométrica

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin(2\theta) \tag{45}$$

Com isso obtemos

$$x^{*} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \tag{46}$$

Isso mostra que o alcance é máximo quando

$$\theta = 45^\circ = \pi/4$$

pois nesse caso $\sin(2\theta) = \sin(\pi/2) = 1$.

Já a altura máxima (39) se torna

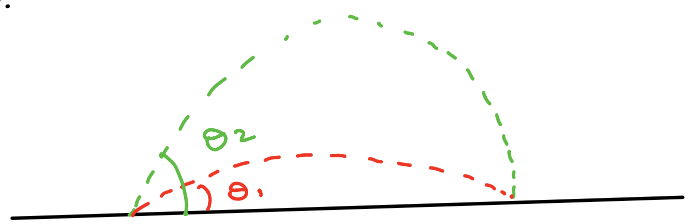
$$\tilde{y} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\theta \tag{47}$$

Ela será máxima quando $\theta = \pi/2 = 90^\circ$; ou seja, no lançamento vertical.

Finalmente, a equação paramétrica (41) pode ser escrita como

$$y = \tan(\theta)\, x - \frac{g^2}{2 v_0^2} \frac{x^2}{\cos^2(\theta)} \tag{48}$$

Um resultado interessante da Eq. (46) é que, para um dado v_0 podem existir dois valores de θ que atingem o mesmo alvo.



Isso ocorre pois a Eq. (46) envolve $\operatorname{sen}(2\theta)$ e não $\operatorname{sen}(\theta)$. Por exemplo, se $\theta = 30^\circ = \pi/6$ ou $\theta = 60^\circ = \pi/3$, temos

$$\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, esses dois ângulos levam ao mesmo x°.

Os pares de ângulos θ_1 e θ_2 que levam ao mesmo x° são simétricos em torno de 45°. É legal mostrar isso matematicamente:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} + \delta$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{4} - \delta$$

para um certo ângulo δ. Por exemplo, o caso $(30^\circ, 60^\circ)$ corresponde a $\delta = \pi/12 = 15^\circ$. Agora escrevemos

$$\sin(2\theta_1) = \operatorname{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\delta\right)$$

Usando as Palmeiras e os Sabiás,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

obtemos

$$\operatorname{sen}(2\theta_1) = \underbrace{\operatorname{sen}(\pi/2)}_{1}\cos(2\delta) + \sin(2\delta)\underbrace{\cos(\pi/2)}_{0}$$

$$= \cos(2\delta)$$

Por outro lado, se fizermos o mesmo com θ_2 chegaremos a

$$\operatorname{sen}(2\theta_2) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2\delta\right)$$

$$= \underbrace{\operatorname{sen}(\pi/2)}_{1}\cos(2\delta) - \operatorname{sen}(2\delta)\underbrace{\cos(\pi/2)}_{0}$$

$$= \cos(2\delta)$$

Ou seja, $\operatorname{sen}(2\theta_1) = \operatorname{sen}(2\theta_2)$. Isso mostra que existem dois ângulos, simétricos em torno de 45°, que levam ao mesmo x°.

Podemos agora inverter a pergunta. Suponha que você é um general do Napoleão e comanda um canhão que atira projéteis com velocidade v_0. Você sabe a distância x_0 e quer escolher a inclinação do canhão para atingir o alvo.

Da Eq. (46) temos então

$$\sin(2\theta) = \frac{x' g}{v_0^2} \tag{49}$$

o que lhe fornece o ângulo dado x', g e v_0^2. Note, no entanto, que há um limite (é claro!): para um dado v_0 não podemos alcançar qualquer posição x'. Isso é expresso matematicamente na Eq. (49) pelo fato de que o seno só pode estar entre -1 e 1. Ou seja, a Eq (49) só terá solução para θ quando

$$\frac{x' g}{v_0^2} < 1$$

Isso define portanto o alcance máximo

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

que ocorre quando $\theta = 45°$.