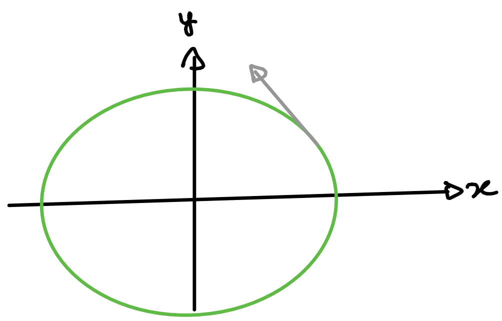
Movimento circular

"Movimento circular", como o nome já diz, se refere ao caso onde a trajetória da partícula descreve um círculo. Ou seja, a distância com relação à origem é constante. Ou seja

$$|r(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = r = \text{constante} \qquad (1)$$

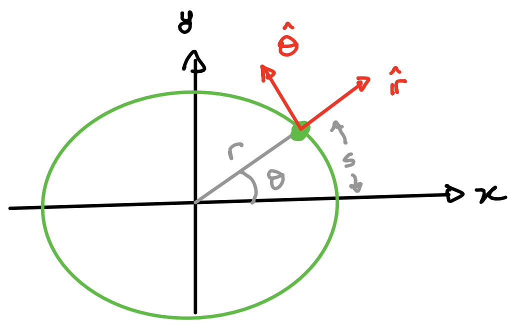


Esse tipo de movimento é importante pois representa, em uma 1ª aproximação, a órbita de planetas e satélites. As órbitas, na verdade, são elípticas. Mas muitas vezes a elipticidade é pequena e elas podem ser aproximadas por um círculo.

Outro exemplo muito importante são aqueles brinquedos em parques de diversões onde a gente fica girando loucamente e que, vira e mexe, sai a notícia de que alguém saiu voando e morreu.

Veremos agora como descrever matematicamente o movimento circular, usando os conceitos que aprendemos nas aulas anteriores, sobre cálculo e vetores.

O diagrama básico com a notação que iremos adotar está mostrado abaixo. Escolhemos um sistema de coordenadas com origem no centro do movimento. O vetor posição é $\mathbb{r}(t)$. Sua magnitude é constante, $|\mathbb{r}(t)| = r$ [Eq. (1)]. Mas sua direção não. Conforme a partícula se move, o vetor $\mathbb{r}(t)$ gira em torno do plano, sempre apontando para fora.



O movimento circular é completamente definido pelo ângulo $\theta(t)$ que a partícula faz com o eixo x. Ou seja, se sabemos a função $\theta(t)$, podemos calcular qualquer outra grandeza. Por exemplo, as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r\cos\theta(t) \\
y(t) &= r\,\mathrm{sen}\,\theta(t)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

e, portanto, o vetor posição será

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \qquad (3)$$
$$= r\cos\theta(t)\,\hat{i} + r\sin\theta(t)\,\hat{j}$$

como teste de sanidade:

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = r^2\left[\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)\right]$$
$$= r^2$$

Note como isso é verdade para qualquer $\theta(t)$.

Diferentes funções $\theta(t)$ caracterizam diferentes tipos de movimento circular. Por exemplo $\theta(t) = \omega t$ é o movimento circular uniforme. Mas podemos ter também qualquer outra função bizarra para $\theta(t)$, que o movimento continua sendo circular. Ou seja, o que caracteriza o mov. circ. não é a forma de $\theta(t)$, mas o fato de termos r constante.

Vejamos algumas outras definições importantes. Definimos o arco $s(t)$ como a distância percorrida pela partícula ao longo do círculo (vide figura). O valor de $s(t)$ é obtido também de $\theta(t)$ através de

$$s(t) = r\,\theta(t) \tag{4}$$

Definimos também um vetor unitário

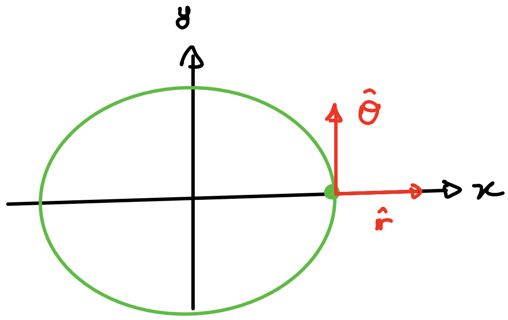
$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{r} \tag{5}$$

Ele aponta sempre para fora, como $\mathbf{r}(t)$. Usando a Eq. (3) vemos que

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \cos\theta(t)\,\hat{i} + \sin\theta(t)\,\hat{j} \tag{6}$$

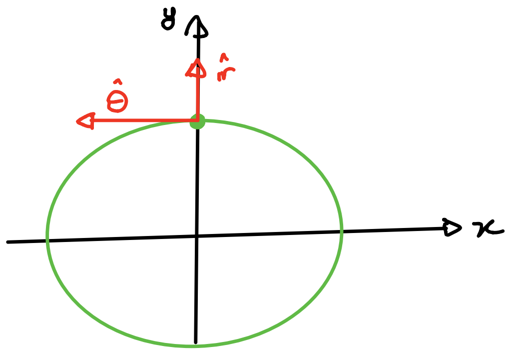
Note que, ao contrário de $\hat{i}$ e $\hat{j}$, que não mudam no tempo, o vetor $\hat{\mathbf{r}}(t)$ está constantemente andando.

Finalmente, definimos um outro vetor unitário, $\hat{\theta}(t)$, que é perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}(t)$. Para ganhar um pouco de intuição, vejamos alguns exemplos.



$$\hat{r} = (1, 0)$$

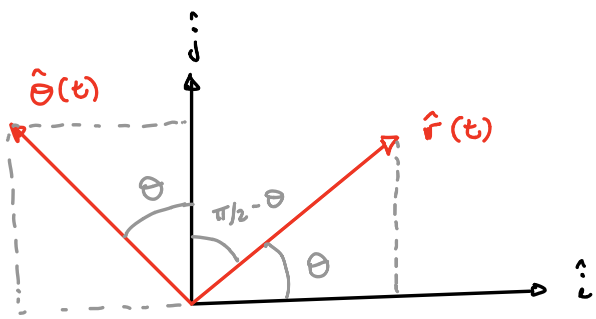
$$\hat{\theta} = (0, 1)$$



$$\hat{r} = (0, 1)$$

$$\hat{\theta} = (-1, 0)$$

De forma mais geral, temos



Ou seja, $\hat{\theta}(t)$ faz um ângulo $\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \theta = \frac{\pi}{2} + \theta$ com $\hat{i}$.

Portanto, em analogia com (6), teremos

$$\hat{\theta}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\hat{i} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\hat{j} \qquad (7)$$

Mas

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta = \cos\theta. \tag{8}$$

Portanto, finalmente concluímos que

$$\hat{\theta}(t) = -\sin\theta(t)\,\hat{i} + \cos\theta(t)\,\hat{j} \tag{9}$$

Você pode verificar que isso concorda com os exemplos que discutimos acima.

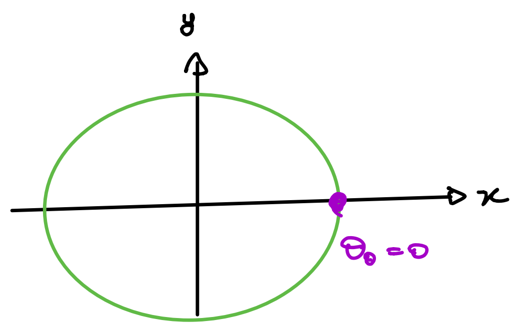
Esse vetor, como veremos, será essencial na descrição do movimento circular. O motivo é que $\hat{\theta}(t)$ descreve a direção que é tangencial ao círculo.

Exemplo: movimento circular uniforme

Antes de continuar com o formalismo teórico, vamos fazer um exemplo. O movimento circular uniforme é definido pela equação

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \tag{10}$$

Aqui ω é a chamada frequência angular, dada em rad/s. Além disso, θ_0 representa o valor de θ no instante t_0. Se $\theta_0 = 0$, o movimento começa sobre o eixo x.



Se $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$ a Eq. (10) simplifica para

$$\theta(t) = \omega t \tag{11}$$

De qualquer forma, vemos da Eq. (10) que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{12}$$

Essa expressão é geral e vale para qualquer movimento circular. A diferença é que no caso do movimento uniforme, ω é constante.

O período T é o tempo que leva para a partícula dar uma volta. Ou seja, para que $\theta = 2\pi$. Da Eq. (11) obtemos, portanto

$$\theta(T) = 2\pi = \omega T \tag{13}$$

Ou seja

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{14}$$

É importantíssimo notar que isso não pode depender da nossa escolha de referencial. Ou seja, a Eq. (13) também deve ser verdade se começamos com $\theta_0 \neq 0$ e $t_0 \neq 0$ [Eq. (10)]. Só que nesse caso devemos ter $\theta - \theta_0 = 2\pi$ e $T = t - t_0$.

A frequência linear ν (letra grega "nu") é definida como o inverso do período

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{15}$$

Comparando com (14), vemos que

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{16}$$

A frequência linear é medida em rotações por segundo, ou Hertz

$$1 \text{ Hz} = \frac{1}{s} \tag{17}$$

Às vezes usamos também rotações por minuto (RPM). Por exemplo, o pistão de um carro normal gira em torno de 3000 RPM. Isso equivale a

$$3000 \times \frac{1}{min} = 3000 \times \frac{1}{60 s} = 50 \text{ Hz}$$

Não é muito doido isso?! Dentro do carro tem peças de aço, que pesam vários quilos e que giram 50 vezes por segundo! E tudo isso acontece a 1 metro das nossas pernas!

Parêntese: dois resultados sobre derivadas

Para que vocês consigam apreciar o que vem em seguida, eu vou precisar de dois resultados que vocês vão aprender no curso de cálculo. O primeiro é a derivada de funções trigonométricas:

$$\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$$
$$\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t) \tag{18}$$

Eu não vou demonstrar isso aqui. A conta não é difícil, mas requer um pouco de tempo. Vocês vão ter que confiar em mim!

O segundo resultado é a chamada regra da cadeia. Ela ensina como derivar a composição de duas funções:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt} \tag{19}$$

Isso pode parecer um pouco confuso à 1ª vista. Então deixe-me explicar. A ideia da Eq (19) é quebrar uma derivada complicada no produto de derivadas mais simples.

vamos começar com um exemplo simples:

$$\frac{d}{dt}(2t)^2 = \frac{d}{dt}(4t^2) = 4\frac{d}{dt}(t^2) = 8t$$

Por outro lado, podemos definir $f(g) = g^2$ e $g(t) = 2t$, de tal forma que

$$(2t)^2 = f(g(t))$$

A derivada das funções $f(g)$ e $g(t)$ são

$$\frac{df}{dg} = 2g \qquad \frac{dg}{dt} = 2$$

Portanto, de acordo com a Eq. (19), devemos ter

$$\frac{d}{dt}(2t)^2 = (2g)(2)$$

Mas como $g = 2t$, chegamos a $2 \times (2t) \times 2 = 8t$.

vejamos agora um exemplo mais bacana: a derivada de

$$f = \sin(\omega t)$$

Nesse caso $g(t) = \omega t$ e $f(g) = \sin g$ já que

$$f(g(t)) = \sin(\omega t).$$

Sabemos de (18) que

$$\frac{d}{dg}\sin(g) = \cos(g) \qquad\qquad \frac{d}{dt}(\omega t) = \omega$$

Portanto, da Eq. (19) temos

$$\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = \cos(g)\,\omega$$

ou

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(\omega t) = \omega\cos(\omega t) \tag{20}$$

O resultado é quase igual à Eq. (18), só que ganhamos um ω no lado de fora. Isso faz sentido do ponto de vista de análise dimensional pois $\sin(\omega t)$ é adimensional ao passo que $\frac{d}{dt}$ tem unidades de $1/s$. No lado direito da Eq. (20) o "ω" vem exatamente para compensar esse fator de $1/s$.

Da mesma forma, podemos derivar $\cos(\omega t)$. Nesse caso $f(g) = \cos(g)$ e $g(t) = \omega t$. Da Eq. (18) temos

$$\frac{df}{dg} = -\sin(g) \qquad\qquad \frac{dg}{dt} = \omega$$

Portanto, da (19) obtemos

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega\sin(\omega t) \tag{21}$$

Velocidade e aceleração no movimento circular

Vamos agora voltar para o movimento circular geral. Os nossos principais resultados eram

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

$$x(t) = r\cos\theta(t) \qquad (22)$$

$$y(t) = r\,\text{sen}\,\theta(t)$$

além dos dois vetores unitários

$$\hat{r}(t) = \cos\theta(t)\,\hat{i} + \sin\theta(t)\,\hat{j} \qquad (23)$$

$$\hat{\theta}(t) = -\sin\theta(t)\,\hat{i} + \cos\theta(t)\,\hat{j} \qquad (24)$$

Vamos agora usar isso para calcular a velocidade e a aceleração. Como vimos na aula passada, o vetor velocidade é definido como

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} \qquad (25)$$

Para calcular essas derivadas, usamos a regra da cadeia (19). Começamos por $x(t) = r\cos\theta(t)$. Nesse caso

$$f(g) = r\cos g$$

$$g(t) = \theta(t)$$

Como $g = \theta$, podemos simplesmente usar θ no lugar de g:

Portanto

$$\frac{d}{dt}\left(r\cos\theta(t)\right) = \frac{df}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

Da Eq. (18),

$$\frac{df}{d\theta} = -r\sin\theta$$

Já $d\theta/dt$ não podemos dizer mais nada pois não sabemos qual é a forma de $\theta(t)$. Portanto concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(r\cos\theta(t)\right) = -r\sin\theta(t)\,\frac{d\theta}{dt} \tag{26}$$

Se quiser podemos ser um pouco mais compactos usando a notação

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) \tag{27}$$

Com isso chegamos a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cos\theta(t)\right) = -r\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \tag{28}$$

O resultado para $y(t)$ é análogo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\sin\theta(t)\right) = r\dot{\theta}\cos\theta(t) \tag{29}$$

Com isso a velocidade (25) se torna

$$\vec{v}(t) = -r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{i} + r\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j} \qquad (30)$$

Note que, colocando $r\dot{\theta}$ em evidência, obtemos exatamente o vetor unitário $\hat{\theta}(t)$ na Eq (24). Ou seja

$$\vec{v}(t) = r\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta} \qquad (31)$$

Esse resultado é importantíssimo: a velocidade no movimento circular é sempre tangencial ao círculo. Já a magnitude do vetor velocidade é

$$v = |\vec{v}| = \left| r\frac{d\theta}{dt} \right| \qquad (32)$$

já que $\hat{\theta}$ é um vetor unitário. Note também que, como

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \qquad (33)$$

é a frequência angular, podemos escrever a (31) como

$$\vec{v}(t) = r\omega(t)\,\hat{\theta}(t) \qquad (34)$$

ou, na forma da Eq. (30),

$$\vec{v}(t) = -r\omega(t)\,\text{sen}\,\theta(t)\,\hat{i} + r\omega(t)\cos\theta(t)\,\hat{j} \qquad (35)$$

Em seguida, vamos calcular o vetor aceleração

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \qquad (36)$$

Usando a Eq (35) obtemos

$$a(t) = -r\frac{d}{dt}\left[\omega(t)\sin\theta(t)\right]\hat{i} + r\frac{d}{dt}\left[\omega(t)\cos\theta(t)\right]\hat{j} \qquad (37)$$

Para calcular essas derivadas precisaremos de mais uma regra de cálculo, chamada regra do produto

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)g(t)\right] = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt} \qquad (38)$$

Para o 1º termo da Eq (37) teremos então

$$\frac{d}{dt}\left[\omega(t)\sin\theta(t)\right] = \frac{d\omega}{dt}\sin\theta(t) + \omega(t)\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sin\theta(t)\right)}_{\dot{\theta}\cos\theta(t)} \qquad (39)$$

pela Eq. (29)

Como $\dot{\theta} = \omega$, obtemos um ω^2 no 2º termo:

$$\frac{d}{dt}\left[\omega(t)\sin\theta(t)\right] = \dot{\omega}\sin\theta(t) + \omega^2(t)\cos\theta(t) \qquad (40)$$

Da mesma forma, temos

$$\frac{d}{dt}\left[\omega(t)\cos\theta(t)\right] = \frac{d\omega}{dt}\cos\theta(t) + \omega(t)\overbrace{\frac{d}{dt}\left(\cos\theta(t)\right)}^{-\omega\,\mathrm{sen}\,\theta(t)}$$

$$= \dot{\omega}\cos\theta(t) - \omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \qquad (41)$$

Combinando (40) e (41) na (37), obtemos

$$a(t) = -r\left[\dot{\omega}\,\mathrm{sen}\,\theta + \omega^2\cos\theta\right]\hat{i} + r\left[\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta\right]\hat{j} \qquad (42)$$

Para ficar um pouco menos bagunçado, podemos escrever isso em termos de $\hat{r}(t)$ e $\hat{\theta}(t)$ na Eq (23) e (24). Para isso agrupamos os termos com $\dot{\omega}$ e ω^2:

$$a(t) = r\dot{\omega}\Big[\overbrace{-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{j}}^{\hat{\theta}(t)}\Big] - r\omega^2\Big[\underbrace{\cos\theta\,\hat{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{j}}_{\hat{r}(t)}\Big]$$

Portanto, concluímos que

$$a(t) = r\dot{\omega}\,\hat{\theta}(t) - r\omega^2\,\hat{r}(t) \qquad (43)$$

ou seja, o vetor aceleração possui tanto uma componente tangencial

$$a_T(t) = r\dot{\omega} \qquad (44)$$

quanto uma componente centrípeta (ou seja, na direção de $\hat{r}$)

$$a_N = -r\omega^2 \qquad (45)$$

A componente tangencial só existe se $\dot{\omega} \neq 0$. Ou seja, ela se anula no movimento circular uniforme (onde ω é constante). Apesar disso, nesse caso ainda sobra a componente normal.

Inclusive, note como da Eq. (34) temos

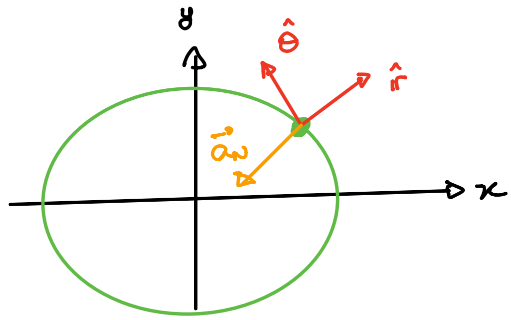
$$v = r\omega \qquad (46)$$

Portanto a Eq (45) pode ser escrita como

$$a_N = -\frac{v^2}{r} \qquad (47)$$

que é a fórmula que você deve estar familiar para a aceleração centrípeta.

A aceleração centrípeta sempre tem o mesmo sinal, apontando para dentro, em direção à origem



Ela é responsável por manter o movimento circular, puxando a partícula em direção ao centro. Já a componente tangencial aponta na direção de $\hat{\theta}$, mas pode ter ambos os sentidos, dependendo do sinal de $\dot{\omega}$.