Forças e estática

Nas últimas aulas aprendemos como obter a equação horária de uma partícula, dada pelo vetor posição $\mathbf{r}(t)$, partindo do vetor aceleração $\mathbf{a}(t)$. Primeiro calculamos a velocidade

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int \mathbf{a}(t)\,dt \qquad (1)$$

e depois a posição

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int \mathbf{v}(t)\,dt \qquad (2)$$

Ou podemos fazer o caminho contrário: partimos de $\mathbf{r}(t)$ e obtemos $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$:

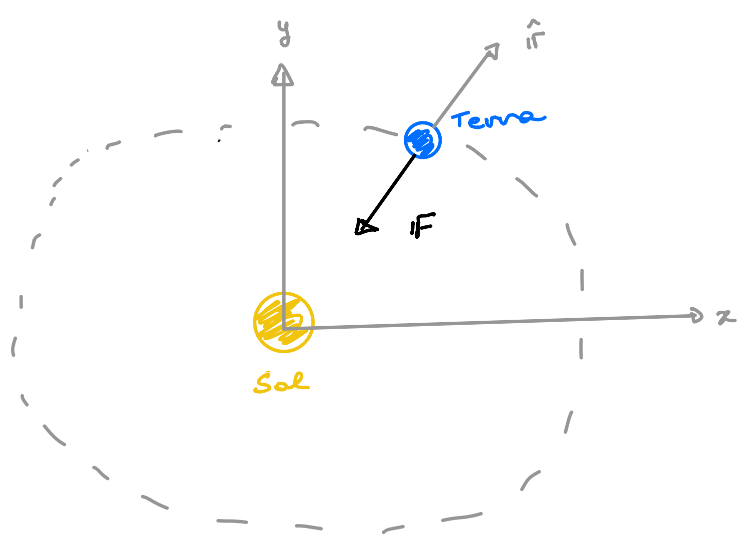
$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (3)$$

Esse é o escopo da cinemática. A cinemática te diz como obter $\mathbf{r}$ de $\mathbf{a}$ ou $\mathbf{a}$ de $\mathbf{r}$. Mas em geral não sabemos nenhum dos dois!

Na realidade, a informação que normalmente temos como ponto de partida são as interações entre partículas. Sabemos, por exemplo, que a terra interage gravitacionalmente com o sol. E queremos, a partir desta informação, obter a posição da terra e do sol em função do tempo.

Essa é a ideia da dinâmica: começamos com as interações entre partículas para obter $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$.

A formulação dos princípios da dinâmica está toda centrada no conceito de força. Força $\mathbb{F}$, é um vetor. Ela possui, portanto, magnitude, direção e sentido. O sol, por exemplo, exerce uma força na terra que é sempre atrativa e, portanto, aponta na direção do sol:



A magnitude da força é dada pela famosa expressão descoberta por Newton

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{4}$$

onde G é a constante gravitacional, M a massa do sol, m a massa da terra e r a distância entre os dois.
Já a direção da força é $-\hat{\mathbf{r}}$, onde $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário mostrado na figura. Portanto, a força gravitacional que o sol exerce na terra pode ser escrita como

$$\boxed{\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}} \tag{5}$$

Então lembre-se disso: força é sempre um vetor e, portanto, precisamos levar em conta sua magnitude, direção e sentido. A Eq. (5) ilustra bem isso: a magnitude é GMm/r^2 e a direção/sentido é $-\hat{\mathbf{r}}$.

— // —

A unidade de força no SI é o Newton, N, que vale

$$[F] = N = kg\,\frac{m}{s^2} \tag{6}$$

Discutiremos mais adiante o porquê dessa relação.

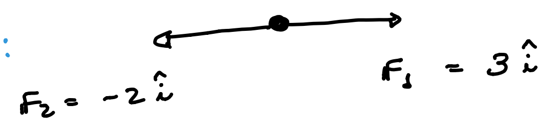
Força resultante

Quando diversas forças, $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, ... atuam sobre um mesmo objeto, a única coisa que vai importar é a soma de todas as forças, chamada força resultante

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_3 + \dots \tag{7}$$

Vejamos alguns exemplos: Abaixo, todas as forças estão em N.

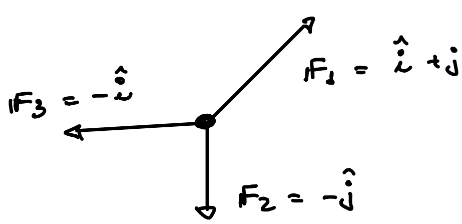
Ex 1:



$$\Rightarrow \quad \mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 = \hat{i}$$

ou seja, apesar de ter alguém empurrando para a esquerda, no final a força resultante é para a direita.

Ex. 2:

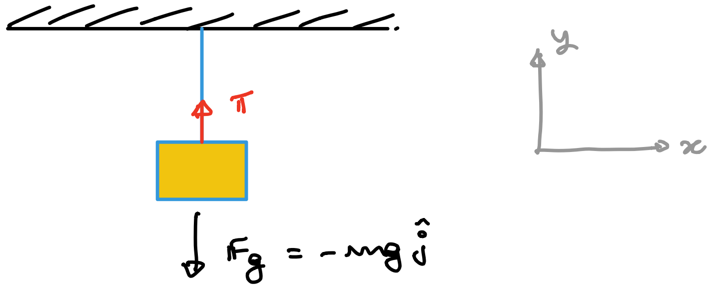


$$\Rightarrow \quad \mathbb{F} = 0$$

Eu tenho 3 pessoas, cada uma puxando numa direção diferente, mas a resultante é zero. Portanto a partícula não sai do lugar.

Ex 3: tensão em uma corda

Considere uma massa presa pelo teto.



A força da gravidade empurra a massa para baixo. Para que ela não se mova, é necessário portanto que haja uma força na corda, chamada força de tensão, puxando-a para cima, de tal forma que a força resultante seja zero:

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{T} = 0$$

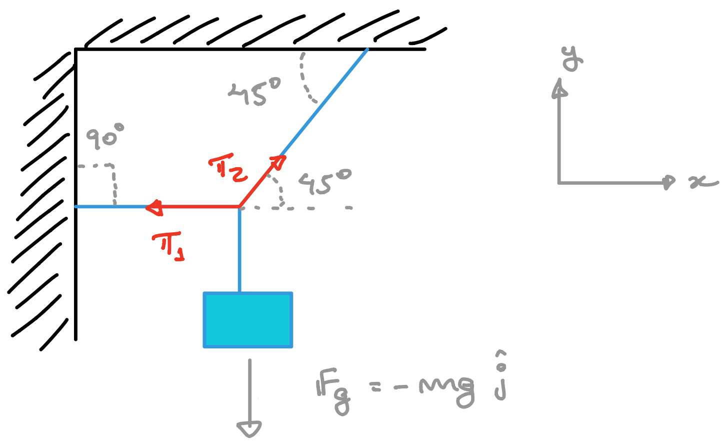
Portanto, a tensão na corda será

$$\mathbf{T} = -\mathbf{F}_g = mg\,\hat{j}$$

Mesma magnitude, mas apontando para cima.

Essa tensão na corda, por sua vez, puxa a parede para baixo, com força T.

Ex 4: Considere uma massa suspensa por duas paredes



Para que a massa fique parada, as forças tem que se compensar de tal forma que a resultante seja nula. Portanto

$$F_g + T_1 + T_2 = 0 \tag{8}$$

Por outro lado, a forma como as cordas estão presas na parede implica que a tensão T_1 só possui componente horizontal, $T_1 = T_1\,\hat{i}$. Já a tensão T_2 tem componentes em ambas as direções, $T_2 = T_{2x}\,\hat{i} + T_{2y}\,\hat{j}$. Mas, como o ângulo que ela faz com o teto é de 45°, as duas componentes não são independentes:

$$\begin{aligned} T_{2x} &= T_2 \cos(\pi/4) \\ T_{2y} &= T_2 \sin(\pi/4) \end{aligned} \tag{9}$$

ou seja

$$T_{2x} = T_{2y} = \frac{T_2}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

A Eq. (8) se torna, portanto

$$\left(-mg\,\hat{j}\right) + \left(T_1\,\hat{i}\right) + \left(\frac{T_2}{\sqrt{2}}\,\hat{i} + \frac{T_2}{\sqrt{2}}\,\hat{j}\right) = 0 \tag{11}$$

Essa é uma equação vetorial e portanto cada componente deve ser individualmente nula.

$$\hat{i}: \qquad T_1 + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0$$

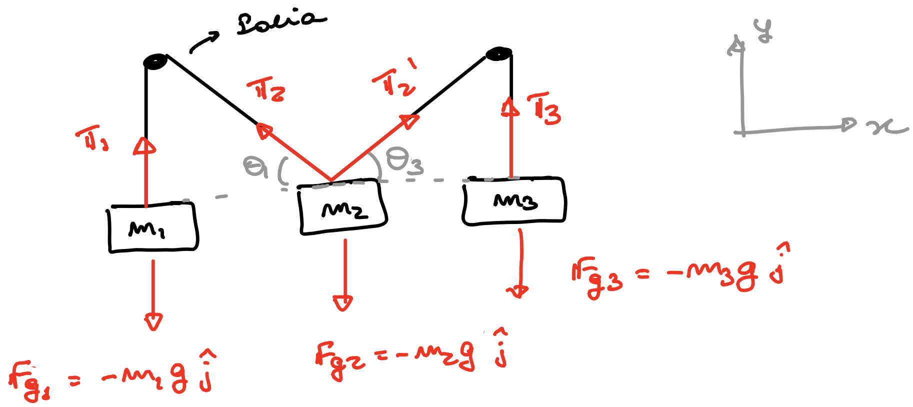
$$\hat{j}: \qquad -mg + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0$$

Portanto

$$T_2 = \sqrt{2}\,mg$$
$$T_1 = -\frac{T_2}{\sqrt{2}} = -mg \tag{12}$$

A tensão T_1 é negativa pois $\vec{T}_1$ aponta para a esquerda. Já T_2 é positiva e portanto T_{2x} e T_{2y} também. Ou seja, $\vec{T}_2$ aponta como na figura.

Ex 5:



Calcule θ_1 e θ_2 em função de m_1, m_2, m_3.

Esse problema já é um pouco mais sofisticado. Vamos com calma.

Todas as forças tem que se balancear. Portanto

$$\vec{T}_1 + \vec{F}_{g_1} = 0 \tag{13a}$$

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_2' + \vec{F}_{g2} = 0 \tag{13b}$$

$$\vec{T}_3 + \vec{F}_{g3} = 0 \tag{13c}$$

(a) e (c) implicam que

$$\vec{T}_1 = m_1 g \hat{j}$$
$$\vec{T}_3 = m_3 g \hat{j} \tag{14}$$

Já a Eq. (13b) implica que

$$\left(T_{2x} \hat{i} + T_{2y} \hat{j}\right) + \left(T_{2x}' \hat{i} + T_{2y}' \hat{j}\right) = m_2 g \hat{j} \tag{15}$$

Ou seja

$$T_{2x} + T_{2x}' = 0 \qquad (16)$$

$$T_{2y} + T_{2y}' = m_2 g$$

Mas, além disso, as tensões internas nas cordas devem se cancelar em módulo. Ou seja

$$T_1 = T_2 = \sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2} \qquad (17)$$

$$T_3 = T_2' = \sqrt{(T_{2x}')^2 + (T_{2y}')^2} \qquad (18)$$

Portanto

$$T_2 = m_1 g \qquad (19)$$

$$T_2' = m_3 g$$

Vamos agora parametrizar

$$T_{2x}' = T_2' \cos\theta_3 \qquad (20)$$

$$T_{2y}' = T_2' \sin\theta_3$$

e

$$T_{2x} = -T_2 \cos\theta_1 \qquad (21)$$

$$T_{2y} = T_2 \sin\theta_1$$

O sinal de menos tem a ver com a forma com que θ_1 foi definido. Por exemplo, se $\theta_1 = 0$, devemos ter $\vec{T}_2 = -T_2 \hat{i}$.

Com isso a Eq. (16) fornece

$$-T_2 \cos\theta_1 + T_2' \cos\theta_3 = 0$$

$$T_2 \operatorname{sen}\theta_1 + T_2' \operatorname{sen}\theta_3 = m_2 g$$

Substituindo (19), obtemos portanto

$$m_1 \cos\theta_1 = m_3 \cos\theta_3 \qquad (22a)$$

$$m_1 \operatorname{sen}\theta_1 + m_3 \operatorname{sen}\theta_3 = m_2 \qquad (22b)$$

Da (22a) temos

$$\cos\theta_1 = \frac{m_3}{m_1} \cos\theta_3 \qquad (23)$$

Ou seja, os ângulos θ_1 e θ_3 estão relacionados entre si através das massas m_1 e m_3. Faz sentido: se $m_1 = m_3$ o problema se torna simétrico e portanto $\theta_1 = \theta_3$

Como θ_1 deve estar entre 0 e $\pi/2$, podemos escrever

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \sqrt{1 - \cos^2\theta_1}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{m_3}{m_1}\right)^2 \cos^2\theta_3}$$

Substituindo em (22b) obtemos então

$$m_1 \sqrt{1 - \left(\frac{m_3}{m_1}\right)^2 \cos^2\theta_3} + m_3 \operatorname{sen}\theta_3 = m_2 \qquad (24)$$

Podemos escrever

$$m_1\sqrt{1-\left(\frac{m_3}{m_1}\right)^2\cos^2\theta_3} = \sqrt{m_1^2 - m_3^2\cos^2\theta_3}$$
$$= \sqrt{m_1^2 - m_3^2(1-\sin^2\theta_3)}$$
$$= \sqrt{m_1^2 - m_3^2 + m_3^2\sin^2\theta_3}$$

Com isso, a Eq. (24) se torna

$$\sqrt{m_1^2 - m_3^2 + m_3^2\sin^2\theta_3} = m_2 - m_3\sin\theta_3 \qquad (25)$$

Isso pode agora ser visto como uma equação para

$$z = \sin\theta_3. \qquad (26)$$

$$\sqrt{m_1^2 - m_3^2 + m_3^2 z^2} = m_2 - m_3 z \qquad (27)$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos

$$m_1^2 - m_3^2 + \cancel{m_3^2 z^2} = m_2^2 + \cancel{m_3^2 z^2} - 2m_2 m_3 z$$

Portanto

$$m_1^2 - m_3^2 - m_2^2 = -2m_2 m_3 z$$

ou

$$z = \frac{m_3^2 + m_2^2 - m_1^2}{2 m_2 m_3} \qquad (28)$$

Yay! Terminamos! Os ângulos serão, portanto

$$\sin\theta_3 = \frac{m_3^2 + m_2^2 - m_1^2}{2 m_2 m_3} \qquad (29a)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{m_3}{m_1} \cos\theta_3 \qquad (29b)$$

enquanto as tensões serão, em módulo,

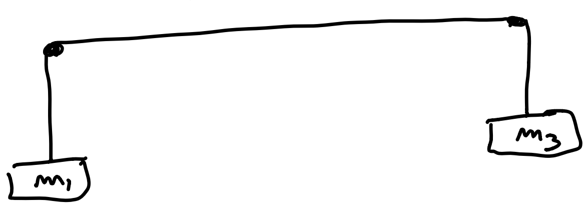
$$T_1 = T_2 = m_1 g \qquad (30)$$
$$T_3 = T_2' = m_3 g$$

Vamos agora analizar o resultado. Suponha, primeiro, que $m_1 = m_3$. Nesse caso $\theta_1 = \theta_3$ e a Eq. (29a) fornece

$$\sin\theta_3 = \frac{m_2}{2 m_3} \qquad (31)$$

Se $m_2 = 0$, obtemos $\theta_3 = 0$. Ou seja, a corda no meio fica plana

(quando $m_2 = 0$)



Por outro lado, não podemos aumentar arbitrariamente m_2. Como $\sin\theta_3 \leq 1$, vemos que só haverá solução quando

$$\frac{m_2}{2m_3} \leq 1 \implies m_2 \leq 2m_3 \tag{32}$$

Se m_2 for muito pesada, não haverá ângulos θ_1, θ_3 que garantam estabilidade. A mesma lógica se aplica ao caso geral (29a), exceto que nesse caso o valor máximo de m_2 é mais difícil de calcular.