As leis de Newton

Os princípios básicos da dinâmica podem ser resumidos em 3 leis fundamentais:

1ª lei: Todo corpo permanece em movimento retilíneo uniforme a menos que haja uma força atuando sobre ele

2ª lei: $\frac{d\vec{p}}{dt} = F$ (um pouco mais bacana que $F = ma$)

3ª lei: O momento total de um sistema isolado é uma constante do movimento.

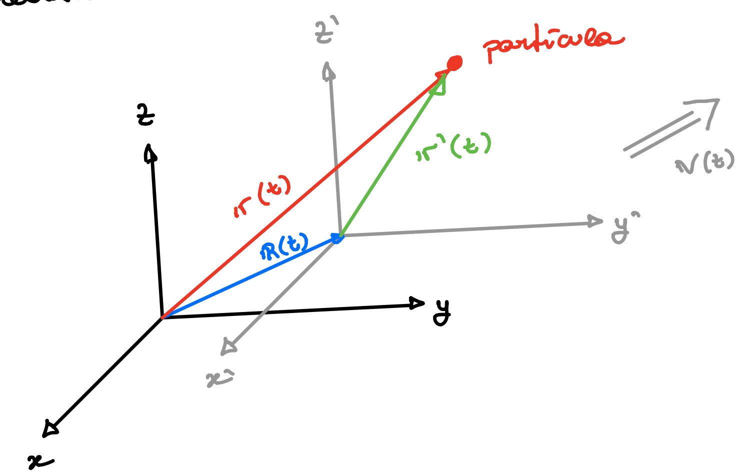
Calma! Sem pânico. Vamos agora discutir cada uma delas em detalhe.

A 1ª lei é tranquila. Seu propósito é definir o conceito de referencial inercial. Um referencial (sistema de coordenadas) é dito inercial quando ele se move com velocidade constante. Ou seja, em movimento retilíneo uniforme.

O aspecto importante sobre referenciais inerciais é que a 2ª lei terá a mesma cara em qualquer referencial inercial.

Vejamos o que isso significa.

Considere dois sistemas de coordenada



Suponha que ambos são inerciais e que o sistema $x'y'z'$ está se movendo com relação a xyz com uma certa velocidade constante $\mathbf{V}$. Suponha que em $t=0$ a origem dos dois referenciais coincidiam. A posição $\mathbf{R}(t)$ de $x'y'z'$ em relação a xyz será, portanto,

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}\, t \tag{1}$$

já que $\mathbf{V}$ é constante.

Considere agora a posição de uma certa partícula no espaço. Seja $\mathbf{r}(t)$ sua posição com relação ao referencial xyz e $\mathbf{r}'(t)$ sua posição medida com relação a $x'y'z'$. Pelas regras de adição de vetores (vide figura) as duas estarão relacionadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) \\ &= \mathbf{r}(t) - \mathbf{V}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Derivando com relação a t obtemos

$$v'(t) = v(t) - V \tag{3}$$

que é a velocidade relativa. Derivando mais uma vez obtemos as acelerações. Mas como V é constante, ficamos apenas com

$$a'(t) = a(t) \tag{4}$$

A aceleração vista de qualquer dois referenciais inerciais é portanto a mesma. A 2ª lei lida apenas com aceleração. Portanto a "cara" da 2ª lei será idêntica em qualquer referencial inercial.

De forma mais geral, costumamos dizer que as leis da física são as mesmas em qualquer referencial inercial. Isso é para contrastar com referenciais acelerados (não inerciais) onde temos que incluir outros termos na 2ª lei. Se sempre usarmos referenciais inerciais, tudo fica mais fácil: sempre teremos a mesma 2ª lei.

$2^{\underline{a}}$ lei:

A $2^{\underline{a}}$ lei de Newton diz que uma força $\mathbb{F}$ agindo sobre uma partícula de massa m produz uma aceleração a dada por

$$a = \frac{\mathbb{F}}{m} \tag{5}$$

Você provavelmente está mais acostumado com $\mathbb{F} = ma$. Claro, matematicamente as duas formas são equivalentes. Mas $a = F/m$ faz muito mais sentido: a força produz a aceleração e não o contrário.

A força $\mathbb{F}$ que entra na Eq. (5) é a força resultante (que vimos na última aula). Ou seja, se várias forças $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$, ... atuam na partícula então

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_3 + \cdots \tag{6}$$

A aceleração, portanto, irá depender apenas da força resultante.

Momento

A física por trás da 2ª lei fica mais clara quando expressa em função do momento (também chamado "momento linear") definido como

$$p = m \cdot v \tag{7}$$

Se a massa não varia no tempo então

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma \tag{8}$$

e, portanto, a 2ª lei (5) pode ser escrita como

$$\frac{dp}{dt} = F \tag{9}$$

Em palavras, a força é responsável pela variação no momento da partícula.

Eu sei que pode parecer desnecessário ter duas definições, velocidade e momento, para coisas tão parecidas. Mas o motivo pelo qual gostamos do momento é porquê ele pode ser estendido para outras teorias físicas. Por exemplo, a Eq. (7) continua sendo válida na teoria da relatividade, mas p não é mais mv.

Momento relativístico

Como já discutimos anteriormente, as leis de Newton só se aplicam a objetos se movendo com velocidades baixas comparadas com a velocidade da luz, c. Caso contrário, elas precisam ser modificadas de acordo com a teoria da relatividade.

O momento linear, na teoria da relatividade, não é mais definido como $m\vec{v}$, mas por

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, m \vec{v} \tag{10}$$

Ou seja, ele ganha um termo extra que depende da razão v/c (onde $v = |\vec{v}|$ é o módulo da velocidade). Infelizmente eu não posso te explicar nesse momento de onde vem a Eq (10) e por que ela faz sentido. Mas eu quis mostrá-la mesmo assim, pelos seguintes motivos:

(1) Ela é linda!

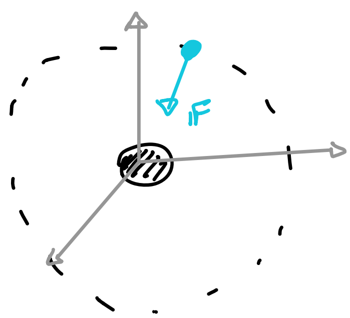
(2) Enfatizar que em física clássica $p = m\vec{v}$, mas isso nem sempre será assim.

Como teste de sanidade, se $v \ll c$ então $1 - v^2/c^2 \approx 1$ e recuperamos $p = m\vec{v}$. Ou seja, para velocidades baixas obtemos a Eq. (7).

Exemplos de forças

Força gravitacional e força peso

Um objeto de massa M exerce sobre um objeto de massa m uma força



$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{11}$$

A força é direcionada de m para M e varia linearmente com as massas e inversamente com o quadrado da distância

A força (11) é uma função do vetor posição $\mathbf{r}(t)$. A 2ª lei (9) fornece, portanto,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

ou,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{12}$$

Essa equação é muito complicada pois a 2ª derivada de $\mathbf{r}$ depende do próprio $\mathbf{r}$. Para ver isso melhor, vamos escrever $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. A Eq. (11) se torna

$$\mathbb{F} = -\frac{GMm}{r(t)^3}\,\mathbb{r}(t) \tag{13}$$

Agora escrevemos $\mathbb{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$. Consequentemente

$$r = |\mathbb{r}| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \tag{14}$$

e portanto

$$\mathbb{F} = -\frac{GMm}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}\left[\,x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{j}\,\right] \tag{15}$$

Isso, por outro lado, deve ser igual a

$$m\mathbb{a} = m\frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{i} + m\frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{j} + m\frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k} \tag{16}$$

Portanto, igualando componente a componente, obtemos.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-\,GMm\,x(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}$$

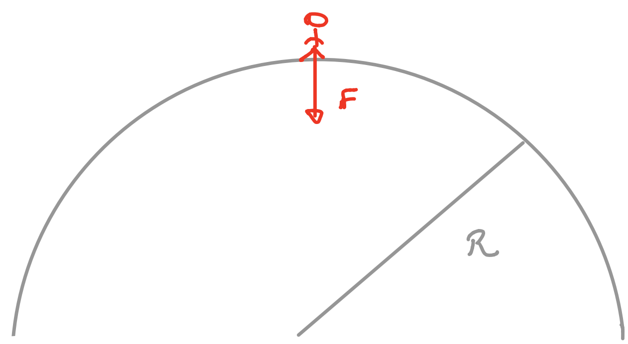
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-\,GMm\,y(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}} \tag{17}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{-\,GMm\,z(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2\right)^{3/2}}$$

Não precisa se preocupar. Eu sei que essas fórmulas são feias. Eu apenas quis escrevê-las para te mostrar como as coisas podem complicar rapidamente. A Eq. (17) ainda é $\frac{dp}{dt} = F$, só que escrita de forma explícita (incrível como conseguimos compactar tanta coisa em uma expressão tão simples!)

O que torna a Eq. (17) difícil de resolver é que a taxa com que x, y e z variam depende de x, y, z. É meio que um loop. Ainda assim, é possível resolver a Eq. (17). Você fará isso no curso de mecânica I no terceiro ano. É possível também resolver a Eq. (17) numericamente. Vide o notebook do Matemática que acompanha essas notas.

A Eq. (11) continua válida para descrever a atração gravitacional que a terra exerce sobre nós.



Nesse caso $r(t)$ será a distância entre o objeto e o centro da terra

$$\mathbb{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \qquad (18)$$

Isso é meio bizarro. É como se toda a massa da terra estivesse concentrada no seu centro. Isso é uma espécie de coincidência da teoria e não há nada muito fantástico por trás. Você vai entender isso bem no curso de física 3.

Existe, no entanto, uma diferença muito grande entre usar a Eq (18) para descrever um cometa passando próximo do sol e um ovo sendo lançado de um viaduto. Quando lançamos o ovo, seu vetor posição pode até variar bastante para os nossos padrões, mas em comparação com o raio da terra isso é nada! O $r(t)$ que aparece na (18) é a distancia com relação ao centro da terra. Se o ovo cai 100 m, isso não é nada com os 6371 km do raio da terra. Portanto, durante a queda do ovo, o termo r^2 na Eq. (18) será, em ótima aproximação, apenas R_T^2, o raio da terra.

Ou seja, para movimentos próximos da superficie da terra podemos aproximar

$$\mathbb{F} = - \frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbb{r}} \approx - \frac{GMm}{R_T^2}\hat{\mathbb{r}} \tag{19}$$

(o $\hat{\mathbb{r}}$ não muda já que esse é apenas o vetor unitário indicando a direção da força). Substituindo valores

$$R_T = 6371 \text{ km}$$
$$M = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$$
$$G = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$$

obtemos

$$\frac{GM}{R^2} = 9.82 \ m/s^2 := g$$

(o símbolo := significa "que definimos como...")

E portanto a Eq. (19) pode ser escrita como

$$\mathbb{F} \simeq -mg\,\hat{\mathbb{r}} \tag{20}$$

que é a boa e velha força peso. Em resumo, portanto, a força peso corresponde a uma aproximação da força gravitacional quando as distâncias envolvidas são pequenas comparadas com o raio da terra.

Um exemplo bacana é o caso dos foguetes. Se quisermos modelar o lançamento de foguetes, <u>não</u> podemos usar a Eq. (20). Temos que usar a (18). Logo após o lançamento, a Eq. (20) até que é OK. Mas conforme o foguete começa a se afastar, ela deixa de ser uma boa aproximação.

O motivo pelo qual a Eq. (20) é útil é porque ela agora independe de $\mathbb{r}(t)$. Resolver a 2ª lei de Newton para ela é, portanto, muito mais fácil (como nós já fizemos em aulas anteriores)

Força centrípeta

Quando estudamos o movimento circular, vimos que mesmo no caso de um movimento uniforme, haverá uma aceleração não nula, a aceleração centrípeta

$$a = -r\omega^2 \hat{r} \qquad = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

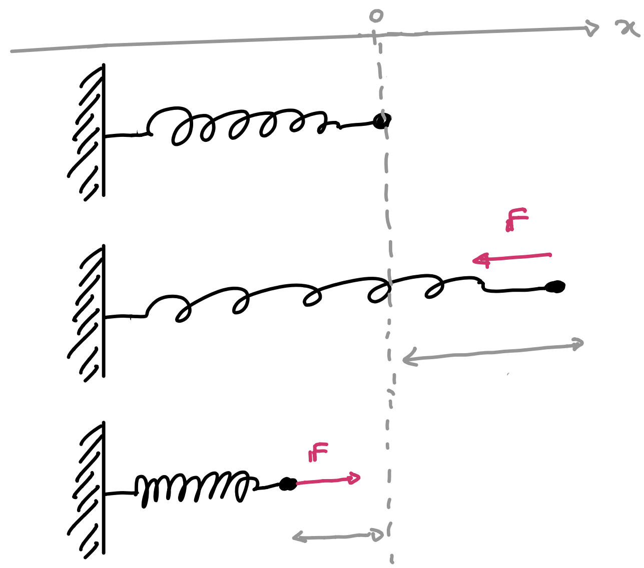
onde, lembrando, $v = \omega r$. Associada a esta aceleração, deve portanto haver uma força $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, ou

$$\mathbf{F} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}} \tag{21}$$

que é a chamada força centrípeta. Essa é a força responsável por manter a partícula em movimento circular. Ou seja, é a força que impede que a partícula saia voando.

Lei de Hooke

Quando esticamos uma mola, ela produz uma força restauradora, que vai na direção contrária ao deslocamento e que aumenta conforme a esticamos mais



Se eu estico para a direita, a força é para a esquerda.
E se eu comprimo a mola (p/ a esquerda) a força será para a direita.

Se o deslocamento x da mola é pequeno, a força será aproximadamente proporcional a x:

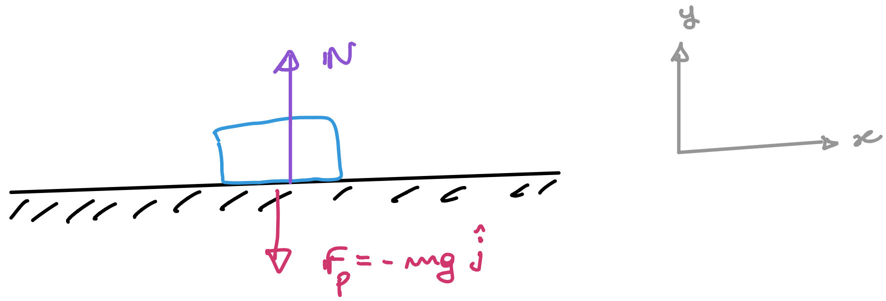
$$\mathbf{F} = -kx\,\hat{i}$$

onde k é a chamada constante de mola.

Essa expressão é válida para deslocamentos pequenos.

Força normal

Quando apoiamos um objeto sobre uma superfície, a superfície tem que exercer uma força sobre o objeto para compensar a força peso. Essa força é chamada força normal

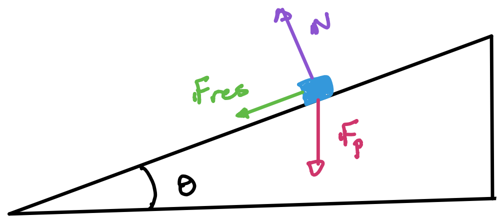


Em física e matemática "normal" significa perpendicular a superfície (físicos não são normais!). A força normal é, portanto, sempre perpendicular à superfície.

A força normal impede que a partícula atravesse a superfície. Portanto, ela deve contrabalancear as outras forças que empurram a partícula para baixo (neste caso apenas a força peso). Portanto teremos

$$\mathbb{N} = -F_p = mg\,\hat{j} \tag{22}$$

Quando a superfície é inclinada isso muda.

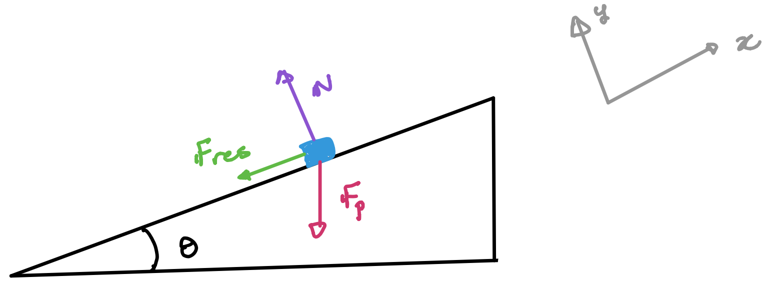


Nesse caso a normal precisa balancear apenas a componente de $\mathbb{F}_p$ que é normal à superfície. Por exemplo, se $\theta = \pi/2$ teremos $N = 0$ (plano vertical). Em módulo, devemos ter portanto

$$N = mg \cos\theta \tag{23}$$

Existe um jeito muito fácil de saber se é $\sin\theta$ ou $\cos\theta$. Basta olhar para casos limite: quando $\theta = 0$ devemos recuperar (22) e quando $\theta = \pi/2$ devemos ter $N = 0$. Portanto, tem que ser $\cos\theta$.

Em problemas envolvendo planos inclinados, é sempre conveniente usar também referenciais inclinados.



Dessa forma, a força normal sempre será na direção y, ao passo que a força peso terá componentes nas duas direções:

$$\mathbb{N} = N\hat{j} = (mg\cos\theta)\hat{j} \tag{24}$$

$$\mathbb{F}_p = -mg\sin\theta\,\hat{i} - mg\cos\theta\,\hat{j} \tag{25}$$

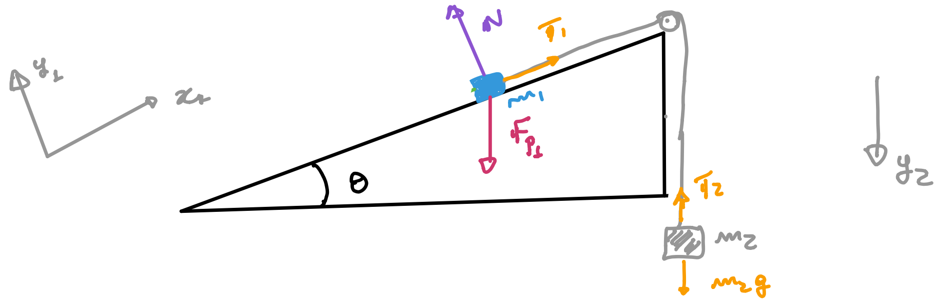
Eu escrevi a (25) sem usar nenhuma trigonometria: eu sei que em $\hat{j}$ deve ser $\cos\theta$ e em $\hat{i}$ deve ser $\sin\theta$ apenas olhando os casos limites $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. E eu sei que a componente x deve ser negativa porque eu escolhi o meu eixo x para a direita.

A vantagem de escolher o referencial inclinado é que a força resultante na direção normal $\hat{j}$ sempre se anula

$$\mathbb{F}_{res} = \mathbb{N} + \mathbb{F}_p = -mg\sin\theta\,\hat{i} \tag{26}$$

Esse é exatamente o propósito da normal. A força resultante será, portanto, na direção de inclinação do plano. Ela fará com que o bloco deslize para baixo. Estamos desprezando o atrito por enquanto. Falaremos de atrito mais adiante.

Exemplo: considere agora a seguinte situação



Conectada à massa m_1, acoplamos uma outra massa m_2. Desprezando o atrito, o que vai acontecer?

Como a corda está esticada, as tensões T_1 e T_2 devem ser iguais em módulo. Portanto, a força resultante na partícula 1 será

$$F_1 = T_1 - m_1 g \sin\theta = m_1 a_1$$

na direção tangencial à superfície. Já para m_2 teremos

$$F_2 = m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

direcionada para baixo (referencial (x_2, y_2)). Como a corda está esticada, no entanto, devemos ter $T_1 = T_2 = T$ $a_1 = a_2 = a$ (ou seja, as duas massas sempre aceleram juntas). Com isso obtemos

$$T = m_1 g \sin\theta + m_1 a$$

$$T = m_2 g - m_2 a$$

Igualando as duas expressões, obtemos

$$m_1 g \sin\theta + m_1 a = m_2 g - m_2 \hat{a}$$

e, portanto,

$$(m_1 + m_2) a = (m_2 - m_1 \sin\theta) g$$

Ou seja, a aceleração das massas será

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \sin\theta) g}{m_1 + m_2} \quad //$$

Pense no que acontece nos casos limites $m_2 \gg m_1$, $m_2 \ll m_1$, $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$.

e a tensão na corda será

$$T = m_2 (g - a)$$

$$= m_2 \left\{ \frac{(m_1 + m_2) g - (m_2 - m_1 \sin\theta) g}{m_1 + m_2} \right\}$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin\theta)$$

Para qual direção o sistema vai andar dependerá se essa componente é positiva ou negativa. Se

$$m_2 > m_1 \sin\theta \qquad (27)$$

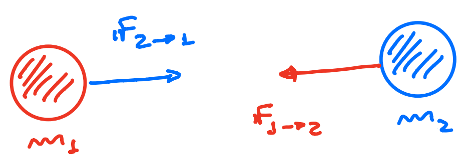
As massas deslizarão para a direita. Caso contrário, para a esquerda. Teste de sanidade: se $\theta = \pi/2$ fica tudo vertical e basta comparar m_1 e m_2. Se $\theta = 0$ a desigualdade se reduz a $m_2 > 0$, que é sempre satisfeita. Ou seja, as massas sempre deslizam para a direita.

$3^{\underline{a}}$ lei

Finalmente chegamos na $3^{\underline{a}}$ lei:

O momento total de um sistema isolado é uma constante do movimento.

Vamos considerar um sistema de duas partículas que estão completamente isolado. Isso significa que não há nenhuma força externa atuando sobre elas (gravitacional, atrito, etc.) Nada nada nada. Apenas duas partículas no vazio do universo (#poético).



A única coisa que podemos ter, portanto, é a partícula 1 exercendo uma força em 2 e a partícula 2 exercendo uma força em 1. O tipo de força não importa. Pode ser gravitacional, eletrostática. Tanto faz.

A $2^{\underline{a}}$ lei de Newton, aplicada à partícula 1, diz portanto que

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{dt} = \mathbb{F}_{2\to1} \tag{28}$$

onde $\mathbb{F}_{2\to1}$ é a força que 2 produz em 1. Da mesma forma, a 2ª lei aplicada à partícula 2 lê-se

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{dt} = F_{1\to 2} \tag{29}$$

onde $F_{1\to 2}$ é a força que 1 produz em 2.

O momento total será

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 \tag{30}$$

E a 3ª lei diz que $\mathbb{P}$ deve ser uma constante do movimento. Ou seja

$$\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(0) = \text{constante.} \tag{31}$$

O valor de $\mathbb{P}(0)$ é determinado pelas condições iniciais. Ou seja, por $\mathbb{P}_1(0)$ e $\mathbb{P}_2(0)$. Mas uma vez que o movimento começa, $\mathbb{P}$ não muda mais. Note que $\mathbb{P}_1(t)$ e $\mathbb{P}_2(t)$ <u>vão</u> mudar no tempo, que é exatamente as Eqs. (28) e (29). Mas a soma deles permanece constante.

Como $\mathbb{P}(t)$ é constante, teremos

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt} = 0 \tag{32}$$

Mas como $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$, obtemos portanto

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 0 \tag{33}$$

Substituindo agora a 2ª lei, Eqs (28) e (29), obtemos

$$\mathbf{F}_{1\to2} + \mathbf{F}_{2\to1} = 0$$

ou,

$$\mathbf{F}_{1\to2} = -\mathbf{F}_{2\to1} \tag{34}$$

que é a famosa lei da ação e reação: a força que 1 exerce em 2 é menos a força que 2 exerce em 1.

Eu podia ter começado dizendo que a 3ª lei é a lei da ação e reação. Mas a forma que eu usei acima, sobre a conservação do momento, é muito mais geral. Nós físicos adoramos leis de conservação. Você tem algum movimento complicado envolvendo várias partículas mas, ali no meio daquela meleca, algo é conservado; alguma grandeza permanece constante. Isso fornece um significado operacional ao momento: é útil definirmos momento pois em sistemas isolados o momento total se conserva.

Ah, claro, eu esqueci de dizer: a 3ª lei vale para um número arbitrário de partículas. Ou seja, se temos um sistema de N partículas, isoladas do resto do universo, então

$$\mathbb{P} = \mathbb{p}_1 + \mathbb{p}_2 + \cdots + \mathbb{p}_N \tag{35}$$

é uma constante do movimento.