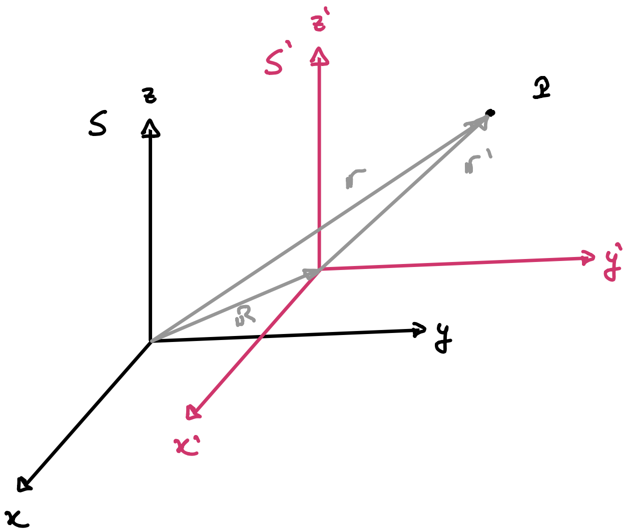
Forças não-inerciais

Considere dois sistemas de coordenadas, S e S'



Os dois sistemas são usados para medir a posição de uma partícula P, que está andando por aí. Denotamos por $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ a posição de P em cada referencial. Além disso, assumimos que o referencial S' está se movendo com relação a S e denotamos por $\mathbf{R}(t)$ a posição da origem de S', medida a partir da origem de S.

Nós vamos supor que S é um referencial inercial, mas S' não. Ou seja, S' vai em geral estar acelerado com relação a S.

As 3 posições $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}$ e $\mathbf{R}$ estão relacionadas, como pode ser visto da figura, por

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) \qquad (1)$$

Derivando duas vezes, obtemos portanto

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{d^2 R}{dt^2} \qquad (2)$$

que eu vou escrever como

$$a' = a - \mathbb{A} \qquad (3)$$

Agora temos que lembrar da 1ª lei: ela diz, essencialmente, que a 2ª lei tem a mesma cara em qualquer referencial inercial. Como S é inercial temos, portanto,

$$a = \frac{\mathbb{F}}{m} \qquad (4)$$

Substituindo em (3) obtemos então

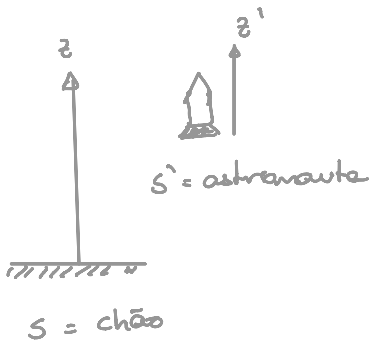
$$a' = \frac{\mathbb{F}}{m} - \mathbb{A}$$

ou

$$m a' = \mathbb{F} - m\mathbb{A} \qquad (5)$$

Essa é a 2ª lei vista num referencial não inercial. Como S' está acelerado, a 2ª lei usual não se aplica a ele. Ou seja, não podemos escrever $ma' = F$ para um referencial não inercial. Pelo contrário, vemos que além de F, ganhamos um termo adicional $-m\mathbb{A}$. Note que não estamos assumindo que $\mathbb{A}$ é constante. Isso vale para $\mathbb{A}(t)$ geral.

Esse termo extra é chamado de força de inercia. Ele não é uma força real. Mas para alguém que vive em um referencial não inercial, é como se fosse. Por exemplo, considere um foguete acelerando para cima com aceleração A.



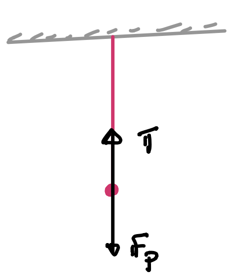
Tomamos S como sendo o chão e S' como sendo o astronauta. A Eq. (5) se torna, portanto

$$m a' = -mg\hat{j} - mA\hat{j}$$

$$= -m(g+A)\hat{j} \qquad (6)$$

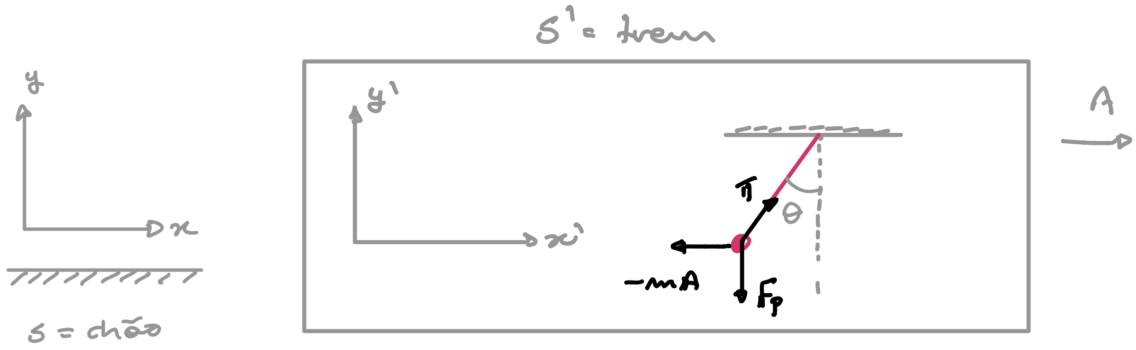
Para o astronauta, portanto, tudo se passa como se a aceleração fosse $g + A$. Se ele derrubar sua caneta BIC, por exemplo, ela vai cair com aceleração $g + A$.

Como um outro exemplo, considere um pêndulo se movendo dentro de um trem. Se a aceleração do trem é nula, a posição de repouso do pêndulo será vertical



Nessa posição a força peso se equilibra com a tensão no fio, levando portanto a uma força resultante nula.

Por outro lado, se o trem está acelerando, o pêndulo irá sentir essa aceleração como uma força de inercia.



O trem acelerando para a direita produz uma força inercial para a esquerda, $-mA$. A força resultante será, no referencial não inercial

$$F_{res} = (T\sin\theta - mA)\,\hat{i} + (T\cos\theta - mg)\,\hat{j} \tag{7}$$

A posição de equilíbrio do pêndulo (ou seja, o ângulo θ para o qual a resultante é nula) será dado, portanto, por

$$\begin{aligned} T\sin\theta &= mA \\ T\cos\theta &= mg \end{aligned} \tag{8}$$

Dividindo uma pela outra, obtemos

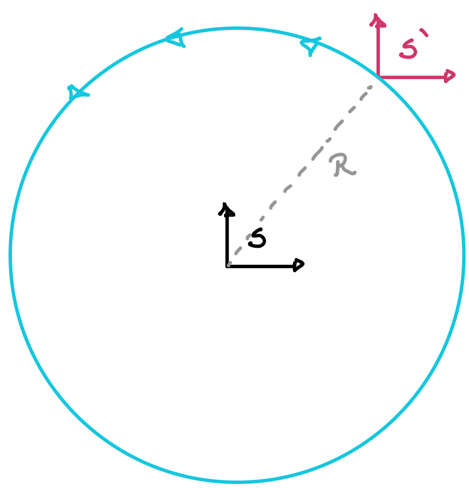
$$\tan\theta = A/g \tag{9}$$

Ou seja, a inclinação do pêndulo está relacionada apenas com a razão A/g.

Força centrífuga

A Eq. (5) é bastante geral e vale para qualquer referencial não inercial. Ou seja, ela vale para qualquer aceleração $A(t)$ do referencial S' com relação ao S.

Suponha agora que o referencial S' está executando um movimento circular uniforme em torno de S.



Imagine, por exemplo, um referencial sentado em um satélite orbitando a terra.

Como vimos quando discutimos o movimento circular (aula 5), um objeto em movimento circular sempre será acelerado. No caso do movimento circular uniforme, essa aceleração será puramente centrípeta e dada por

$$A(t) = -\frac{v^2}{R}\,\hat{R}(t) \qquad (10)$$

onde
$$\hat{R}(t) = \cos(\omega t)\,\hat{i} + \sin(\omega t)\,\hat{j}, \qquad \omega = v/R \tag{11}$$

é a versão unitária do vetor $\mathbb{R}(t)$ que mede a posição da origem de S' em relação a S. Eu estou usando $\hat{\mathbb{R}}$ e não $\hat{\mathbb{r}}$ pois quem está em movimento circular aqui é o referencial S' e não a partícula P.

Isso é importante de entender. Veja só. Imagine que você é um astronauta entediado jogando pingue-pongue na estação espacial. Você, astronauta, representa o referencial S', que está em movimento circular (ao redor da terra). A partícula P, que você quer descrever é a bolinha de pingue-pongue e seu movimento não será circular. Pelo contrário, ele será arbitrariamente complicado.

A 2ª lei de Newton no referencial não inercial será dada pela Eq. (5) com A(t) dado pela equação (10):

$$m a' = F + \frac{m v^2}{R}\hat{R}(t) \tag{12}$$

O menos da Eq. (5) combina com o menos da Eq. (10) para produzir uma força inercial na direção $+\hat{R}(t)$. Essa é a força centrífuga

$$\text{Força centrífuga} = F_c = +\frac{m v^2}{R}\hat{R} \tag{13}$$

A força centrífuga aponta para fora. Ela empurra tudo que está em movimento circular para fora. A força centrípeta é a força que um agente externo deve fornecer para compensar a força centrífuga.

No caso da estação espacial, por exemplo, quem faz esse papel é a gravidade. Considere um objeto parado na estação espacial. No referencial não inercial S' da estação, a Eq. (12) será

$$ma' = -\frac{G M_T m}{R^2}\hat{R} + \frac{m v^2}{R}\hat{R}$$

Onde M_T é a massa da terra. Portanto

$$a' = \left(\frac{v^2}{R} - \frac{G M_T}{R^2}\right)\hat{R} \tag{14}$$

O objeto vai permanecer em repouso quando a gravidade compensa a força centrífuga. Ou seja, quando

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G M_T}{R^2}$$

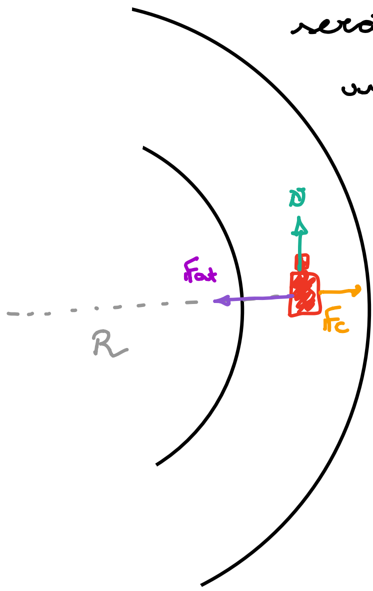
Isso relaciona a velocidade da órbita com o raio:

$$v^2 = \frac{G M_T}{R} \tag{16}$$

Quanto maior o raio, menor a velocidade.

Exemplo: carro fazendo curva.

Considere um carro fazendo uma curva de raio R. Do ponto de vista de alguém no carro, esse será um referencial não inercial e haverá uma força centrífuga



$$\mathbf{F}_c = \frac{mv^2}{R}\hat{R} \qquad (17)$$

Para que o carro consiga se manter na curva, o atrito lateral dos pneus deverá compensar F_c. Esse atrito é estático pois estamos falando do atrito lateral.

Dito de outra forma, a componente radial (normal) da força deve se anular. A condição para que isso não ocorra é, portanto

$$\frac{mv^2}{R} < \mu_e N = \mu_e mg$$

ou

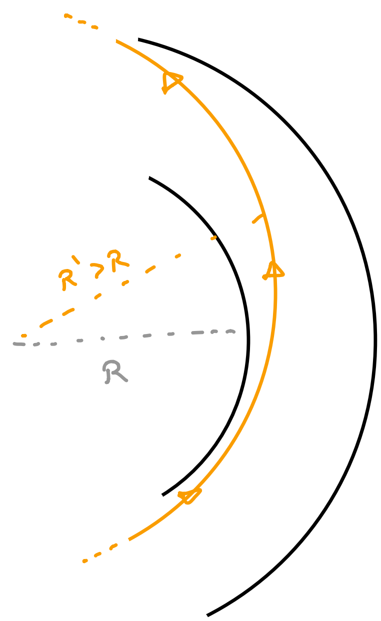
$$v^2 < v_{max}^2 = \mu_e R g \qquad (18)$$

Se v passar desse valor v_{max}, o carro derrapa.

É curioso como esse valor não depende da massa do carro. Isso é uma consequência da forma aproximada da força de atrito que estamos usando. Na realidade vai depender sim da massa.

Note como a Eq (18) depende do raio da curva. Quanto maior for R, maior será a velocidade máxima permitida.

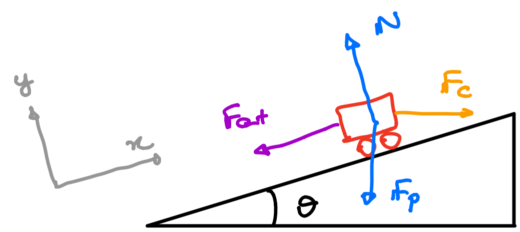
Em corridas de automóvel, é muito comum burlar isso fazendo a curva o mais aberto possível:



Você entra mais fechado e vai abrindo, de tal forma que no final o raio efetivo que você percorreu é maior. Isso permite fazer a curva com uma velocidade maior.

Uma outra forma de aumentar v_{max} é através da aerodinâmica. Estamos desprezando completamente o atrito com o ar aqui. Na prática, no entanto, um bom design aerodinâmico pode pressionar o carro para baixo, aumentando a normal. Consequentemente, isso aumenta também a força de atrito máxima, já que $F_{at}^{max} = \mu_e N$. Carros de corrida pressionam na curva e liberam na reta.

Outra maneira de permitir velocidades maiores é colocar uma inclinação na estrada:



A força resultante será

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_{res} &= \mathbf{N} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{at} + \mathbf{F}_c \\
&= N\hat{j} - mg\left(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right) - F_{at}\,\hat{i} \\
&\quad + \frac{mv^2}{R}\left(\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}\right) \\
&= \left[-F_{at} - mg\sin\theta + \frac{mv^2}{R}\cos\theta\right]\hat{i} \\
&\quad + \left[N - mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}\sin\theta\right]\hat{j}
\end{aligned}
$$

Queremos que ambas as componentes zerem: a componente x para o carro não derrapar e a componente y para ele não começar a levitar. Portanto, obtemos

$$N = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{R}\sin\theta$$

$$F_{at} = -mg\sin\theta + \frac{mv^2}{R}\cos\theta$$

Para que não haja deslizamento, devemos ter $F_{at} < \mu_e N$. Ou seja

$$-mg\sin\theta + \frac{mv^2}{R}\cos\theta < \mu_e \left(mg\cos\theta + \frac{mv^2}{R}\sin\theta\right)$$

Ou

$$\frac{v^2}{R}(\cos\theta - \mu_e \sin\theta) < g(\sin\theta + \mu_e\cos\theta)$$

$$\therefore \quad v^2 < v_{max}^2 = Rg\left(\frac{\sin\theta + \mu_e\cos\theta}{\cos\theta - \mu_e\sin\theta}\right)$$

colocar uma inclinação permite que o carro não derrape mesmo quando o atrito é zero. De fato, colocando $\mu_e = 0$ obtemos

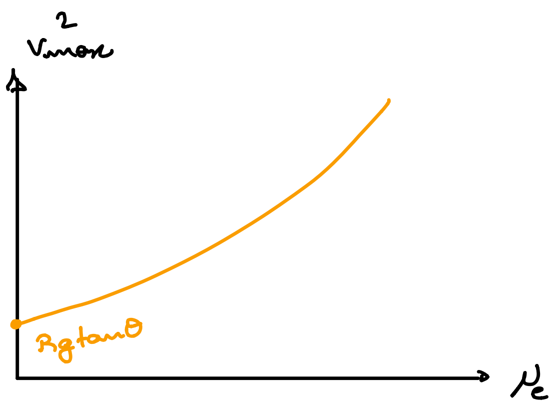
$$v_{max}^2 = Rg\tan\theta$$

Isso fornece a velocidade máxima em função da inclinação. Se $\theta = 0$ obtemos a desigualdade trivial, $v^2 < 0$. Ou seja, se $\theta = 0$ e não há atrito, o carro sempre derrapa. Outro teste de sanidade é colocar $\theta = 0$ na (57), o que leva a

$$v_{max}^2 = Rg\mu_e$$

que é a Eq (18)

Para valores intermediários, obtemos algo como



É interessante estudar também o que acontece quando o atrito é muito muito grande. Colocando $\mu_e >> 1$ na Eq (57) podemos aproximar

$$v_{max}^2 = Rg\left(\frac{\sin\theta + \mu_e\cos\theta}{\cos\theta - \mu_e \sin\theta}\right) \approx Rg\left(\frac{\mu_e\cos\theta}{-\mu_e\sin\theta}\right)$$

$$= -Rg\cot\theta$$

que é negativo, o que não faz o menor sentido. Na verdade isso ocorre pois a equação $F_{at} = \mu_e N$ (que representa o limite do atrito estático) não terá solução. "Não ter solução" significa que, qualquer que seja a velocidade, a F_{at} nunca vai atingir o seu máximo; o carro nunca vai derrapar.

Da Eq (57) vemos que isso ocorre também para μ_e finito, contanto que

$$\cos\theta - \mu_e \sin\theta < 0$$

ou seja, quando

$$\mu_e > \cot\theta .$$

Para uma dada inclinação θ, se $\mu_e > \cot\theta$ o carro nunca derrapa, qualquer que seja sua velocidade. Ele pode estar se movendo na velocidade da luz que nunca vai derrapar. Claro, isso não faz o menor sentido. O motivo para isso, está novamente no caráter aproximado da fórmula do atrito que estamos usando.

Felizmente, na prática isso não é um problema. Por exemplo, se $\theta = 5^\circ$, $\cot\theta \simeq 11.43$. Precisaríamos, portanto de $\mu_e > 11.43$. Isso é surreal. Em geral $\mu_e \sim 0.01$ a 1.