Curso

Não-Markovianidade: caracterização, quantificação e detecção

Aula 1

Estaremos tratando nesse curso da dinâmica de sistemas quânticos abertos. Tipicamente estamos descrevendo um cenário onde temos um sistema de interesse em contato com um ambiente.

Dependendo de como se dá a interação do sistema com o ambiente (interação fraca ou forte, de características do ambiente (estruturado, correlacionado, ou de correlações iniciais entre sistema e ambiente, essa dinâmica poderá ser descrita de diferentes formas.

Markovianidade vs. Não-Markoviano
(s/ efeitos de memória) (c/ efeitos de memória)

Markovianidade para um processo estocástico clássico

Para simplificar vamos tratar um processo estocástico discreto $\{X(t)\}$ onde a variável aleatória X assume valores x_n no tempo t_n.

O processo é definido Markoviano se as probabilidades condicionais satisfazem:

$$p(x_n|x_{n-1},\dots,x_0) = p(x_n|x_{n-1}) \quad \forall\ t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_0$$

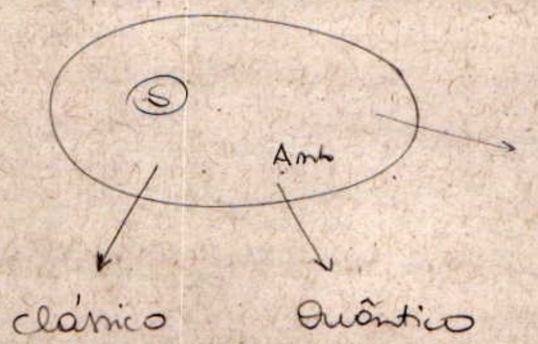
Se quisermos saber a probabilidade de X assumir o valor x_n no tempo t_n, basta então saber o que acontecer com X no tempo t_{n-1}.

$$p(x_n) = \sum_{x_{n-1}} p(x_n|x_{n-1})\, p(x_{n-1})$$

Markoviana: evolução futura só depende do presente

Não-Markoviana: dependência com o passado

<u>Dinâmica de Sistemas Quânticos Abertos</u>



Quântico + Monitoramento (trajetórias quânticas)

* não será tratado aqui

A princípio não assumimos nada sobre o ambiente. Apenas que sistema e ambiente são descritos por operadores que atuam em espaços de Hilbert diferentes:

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{amb}$

- Hamiltoniano $H = H_S \otimes \mathbb{1}_{amb} + \mathbb{1}_S \otimes H_{amb} + H_{int}$

Objetivo principal: descrever a dinâmica do sistema sob a influência do ambiente

- <u>Por que estudar sistemas quânticos abertos?</u>

Estamos buscando construir <u>modelos físicos</u>.

- descrever e entender a transição entre "quântico e clássico"

- descrever, entender, controlar e possivelmente combater os efeitos danosos da inevitável interação com o ambiente para todas tecnologias quânticas

$\Rightarrow$ efeitos de DECOERÊNCIA

Ex.:

$$|0\rangle|E\rangle \xrightarrow{U(t)} |0\rangle|E_0(t)\rangle$$
$$|1\rangle|E\rangle \xrightarrow{U(t)} |1\rangle|E_1(t)\rangle$$

$$(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \xrightarrow{U(t)} \alpha_0|0\rangle|E_0(t)\rangle + \alpha_1|1\rangle|E_1(t)\rangle$$

$$\rho_S(t) = Tr_{AMB}\left(\rho_{S+AMB}^{(t)}\right) = \begin{pmatrix} |\alpha_0|^2 & \alpha_0\alpha_1^* \langle E_1(t)|E_0(t)\rangle \\ \alpha_1\alpha_0^* \langle E_0(t)|E_1(t)\rangle & |\alpha_1|^2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_S(0) = \begin{pmatrix} |\alpha_0|^2 & \alpha_0\alpha_1^* \\ \alpha_0^*\alpha_1 & |\alpha_1|^2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{Bell} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) \times h.c \qquad \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right)$$

• Como descrever a dinâmica de sistemas quânticos abertos?

Para um sistema quântico isolado: Eq. de Schrödinger

$$\rho(t) = U(t)\,\rho\,U^\dagger(t) \qquad U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

Para um sistema aberto:

$$\rho_S(t) = Tr_{amb}\left[U(t)\left(\rho_S \otimes \omega_{AMB}\right)U^\dagger(t)\right]$$

Stinespring

* estou assumindo aqui que inicialmente sistema e ambiente não estão correlacionados

Existem diferentes abordagens para descrição da dinâmica:
- Axiomática
- Microscópica

Mapas (Axiomática)

Mapa $\Phi_t : \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ $\quad$ $\mathrm{Dim}(\mathcal{H}_S) = d$

$$\rho_S(t) = \Phi_t(\rho_S(0))$$

$\downarrow$

completamente positivo e preserva o traço (CPTP)

completamente positivo $\Rightarrow$ a extensão da matriz densidade num espaço de Hilbert maior também é mapeada numa matriz densidade $\Rightarrow$ $\Phi_t \otimes \mathbb{1}_d$ é positivo

$$\Phi_t(\rho) = \mathrm{Tr}_{AMB}\left(U(\rho \otimes w_{AMB})U^+\right)$$

$$= \sum_i \langle \varphi_i | U(\rho \otimes (\sum_j \lambda_j |u_j\rangle\langle u_j|)U^+ |\varphi_i\rangle \quad \lambda_j \in \mathbb{R}^+$$

$$= \sum_{i,j=1}^{d} \sqrt{\lambda_j}\, \underbrace{\langle \varphi_i | U | u_j \rangle}_{E} \rho \sqrt{\lambda_j} \langle u_j | U^+ | \varphi_i \rangle$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{d^2} K_\alpha \rho K_\alpha^+ \longrightarrow \text{OPERADORES de KRAUS}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{d^2} K_\alpha^+ K_\alpha = \sum_{i,j=1}^{d} \lambda_j \langle u_j | U | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | U^+ | u_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \langle u_j | U U^+ | u_j \rangle = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j = 1$$

Obs. Note que o operador de Kraus K_α depende de $|\varphi_i\rangle$. Logo K_α não tem uma representação única!

* Todo mapa CPTP tem representação de Kraus

$\left(\sum_\alpha K_\alpha^+ K_\alpha = \mathbb{1} \right)$.

Eq. Mestra na forma de Lindblad

(Microscópica)

$$\frac{d\rho_{tot}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_{tot}]$$

Eq. de Liouville - von Neumann
(Eq. de movimento)

$\Rightarrow \rho_S(t) = \Phi_t(\rho_S(0))$

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\Phi_t(\rho(0)) = \dot{\Phi}_t(\rho(0))$$

$$= \dot{\Phi}_t \underbrace{\Phi_t^{-1}}_{\text{assumi a inversa}} (\rho_t)$$

$$= \mathcal{L}_t(\rho_t)$$

$\downarrow$

superoperador Lindbladiano
ou gerador

Teorema de Lindblad: se o gerador está associado a um mapa que satisfaz a propriedade de semigrupo, ele deve ter a forma

$$\mathcal{L}_t(\rho(t)) = -i[H_S, \rho_S] + \sum_k \gamma_k \left[L_k \rho L_k^+ - \frac{1}{2}\{L_k^+ L_k, \rho\} \right]$$

onde $\hat{H}_S$ é hermitiano, L_k são operadores arbitrários e $\gamma_k \geqslant 0$.

$\downarrow$

Eq. Mestra na forma de Lindblad ou
Eq. GKSL
Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad

Prop. de semigrupo: $\underset{CP}{\Phi_{t+s}} = \underset{CP}{\Phi_t \Phi_s} \quad \forall\, t,s \geq 0$

$$\rho(t+\Delta t) = \Phi_{\Delta t}\, \rho(t) = \sum_\alpha K_\alpha \rho(t) K_\alpha^+ \quad (*)$$

O que são esses operadores de Kraus?

$$\rho(t+\Delta t) \approx \rho(t) + \Delta t\, \mathcal{L}_t(\rho(t))$$

↓ correção é da ordem de Δt

$$\Rightarrow K_\alpha \rho(t) K_\alpha^+ \sim \Delta t \longrightarrow K_\alpha = \sqrt{\Delta t}\, L_\alpha$$

$$K_0 \rho(t) K_0 \sim \rho(t) \Rightarrow K_0 = \mathbb{1} + G\Delta t$$

arbitrários

$$\sum_\alpha K_\alpha^+ K_\alpha = K_0^+ K_0 + \sum_{\alpha\neq 0} K_\alpha^+ K_\alpha$$

$$= (\mathbb{1} + G^+\Delta t)(\mathbb{1} + G\Delta t) + \Delta t \sum_{\alpha\neq 0} L_\alpha^+ L_\alpha$$

$$= \mathbb{1} + (G + G^+)\Delta t + \Delta t \sum_{\alpha\neq 0} L_\alpha^+ L_\alpha + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Vamos parametrizar G de forma que os operadores de Kraus estejam normalizados:

$$G = F - iH \qquad F = -\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} L_k^+ L_k$$

Substituindo em (*):

$$\rho(t+\Delta t) = (\mathbb{1} + G\Delta t)\,\rho(t)\,(\mathbb{1} + G\Delta t) + \Delta t \sum_{k\neq 0} L_k \rho L_k^+$$

$$= \rho(t) + \Delta t\,(G\rho + \rho G) + \Delta t \sum_{k\neq 0} L_k \rho L_k^+$$

$$= \rho(t) - i\Delta t\,[H,\rho] + \Delta t\left[\sum_{k\neq 0} L_k \rho L_k^+ - \frac{1}{2}\{L_k^+ L_k, \rho\}\right]$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\rho(t+\Delta t)-\rho(t)}{\Delta t} = \frac{d\rho(t)}{dt} = \underbrace{-i[H,\rho]}_{\text{unitária}} + \underbrace{\sum_{k\neq 0} \gamma_k \left[L_k \rho L_k^{\dagger} - \frac{1}{2}\{ L_k^{\dagger} L_k, \rho\} \right]}_{\text{dissipativa}}$$

$\gamma_k \geq 0.$

$\sqrt{\gamma_k}\, L_k \to L_k$

A equação de Lindblad pode ser também derivada assumindo certas características para o ambiente e interação.

Como: · interação fraca (aprox. de Born)

· tempo de correlação curto do reservatório (aprox. de Markov)

* estrutura da eq.

Podemos relaxar um pouco a exigência sobre os mapas: · Divisibilidade

$$\phi_t = \phi_{t,s}\,\phi_s \quad \forall\ t \geq s \geq 0$$

$\Leftrightarrow$ Eq. Mestra na forma de Lindblad, mas com $\gamma_k(t) \geq 0$

$\Rightarrow$ Com isso acabamos de identificar um regime que denominaremos de MARKOVIANO

Mas como isso está relacionado com a ideia clássica inicial de processos estocásticos Markovianos?

Markoviana $\phi_{t+s,0} = \phi_{t+s,s}\,\phi_{s,0} \quad \forall\ t \geq s \geq 0$

(Evol. futura só depende do presente)

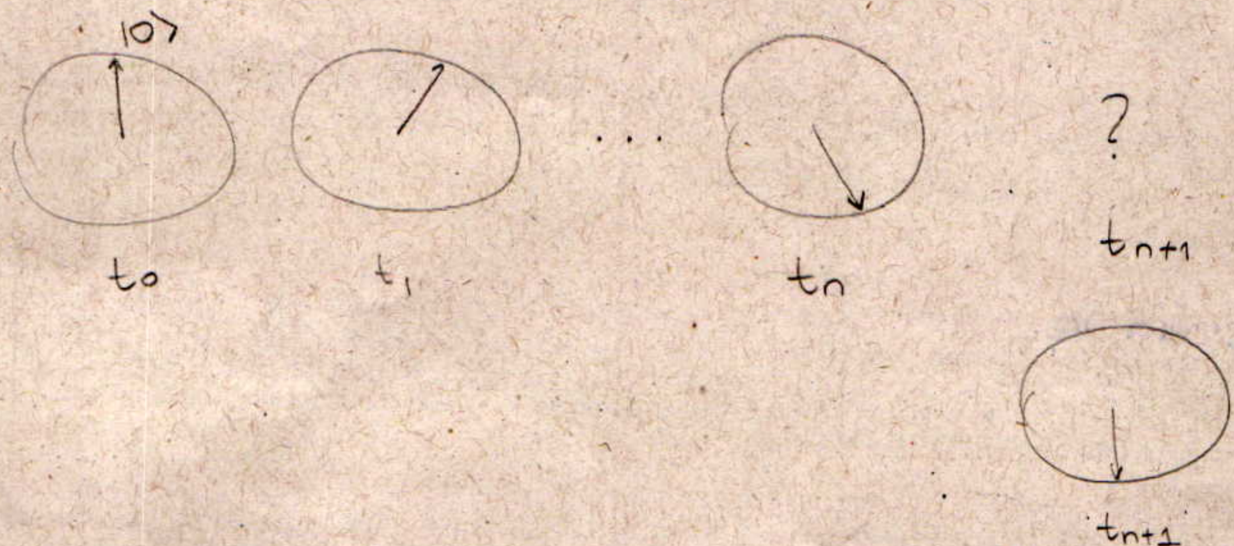
Não-Markoviana: dependência com o passado

Vamos pensar em alguns exemplos que ilustram essa ideia.

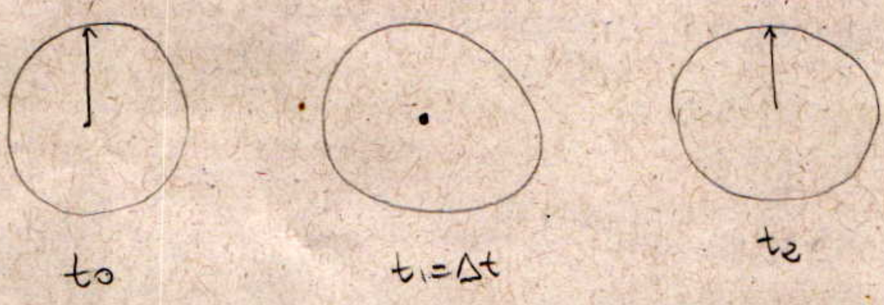
Assumimos a dinâmica de um qubit.

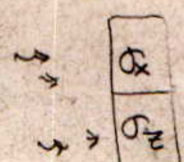
Ex. Markoviana:

A cada passo rodo meu qubit de 15°.



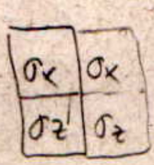
Ex. Não-Markoviana





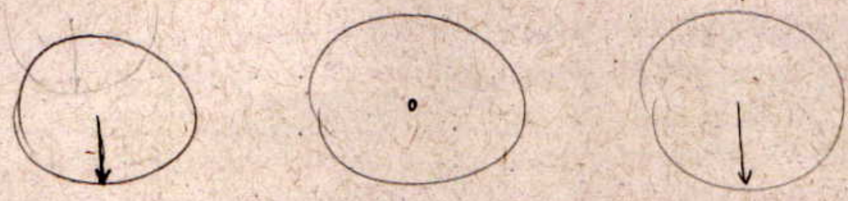
$\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$

$\rho(\Delta t) = \frac{1}{2}\sigma_x \rho(0)\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_z \rho(0)\sigma_z$

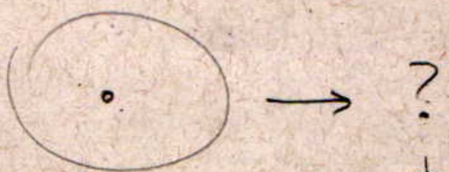


$\rho(2\Delta t) = \rho(0)$

$\rho(0) = |1\rangle\langle 1|$



t_0 t_1 t_2



t_{n+1}

t_n

$D(0) = 1$

$D(\Delta t) = 0 \implies$ Recuperação de Informação

$D(0) = 1$

Por que não usamos a definição da prob. condicional para definir a dinâmica?

1º $\rightarrow$ probabilidades dependem do observável

Note que uma dinâmica divisível pode ser que não satisfaça a condição $p(x_n) = \sum_{x_{n-1}} p(x_n|x_{n-1})\, p(x_{n-1})$.

Exemplo:

Considere a dinâmica de um qubit definida por uma evolução unitária $H = \frac{\omega \sigma_z}{2}$ e uma parte da interação com o ambiente que é dada pelo mapa

$$\phi(\rho) = \gamma_1 \sigma_+ \rho \sigma_+^\dagger + \gamma_2 \sigma_- \rho \sigma_-^\dagger + \delta \sigma_z \rho \sigma_z$$

onde $\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$ e $\sigma_- = |0\rangle\langle 1|$ (op de criação e aniquilação)

° Lembrando do que desenvolvemos hoje na aula

os operadores de dissipação serão

$L_1 = \sqrt{\gamma_1}\,\sigma_+$ $\qquad L_0 = \mathbb{1}_t$

$L_2 = \sqrt{\gamma_2}\,\sigma_-$

$L_3 = \sqrt{\gamma}\,\sigma_z$

parte de banho / aquecimento

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{L}_t(\rho_t) = -i[H_S, \rho_t] + \gamma_1\left(\sigma_+\rho\sigma_- - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}\right)$$

parte de relaxação / resfriamento

$$+\gamma_2\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_-\sigma_+, \rho\}\right)$$

$$+\gamma\left(\sigma_z\rho\sigma_z - \frac{1}{2}\{\sigma_z\sigma_z, \rho\}\right)$$

$$= -i[H_S, \rho_t] + \gamma_1\mathcal{L}_1(\rho_t) + \gamma_2\mathcal{L}_2(\rho_t) + \gamma\mathcal{L}_z(t)$$

parte de pura decoerência

Para resolver a eq. mestra, vamos parametrizar o estado de 1-qubit:

$$\rho_t = p_0(t)P_0 + p_1(t)P_1 + \alpha(t)\sigma_+ + \overline{\alpha(t)}\sigma_-$$

com $P_k = |k\rangle\langle k|$

Posso olhar a ação do gerador em cada componente do estado:

$$\mathcal{L}(P_0) = \gamma_1(P_1 - P_0) = -\gamma_1\sigma_z$$

$$\mathcal{L}(P_1) = \gamma_2(P_0 - P_1) = \gamma_2\sigma_z$$

$$\mathcal{L}(\sigma_+) = (i\omega - \eta)\sigma_+$$

$$\mathcal{L}(\sigma_-) = (-i\omega - \eta)\sigma_-$$

$$\eta = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \gamma$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) & \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\bar{\alpha}}(t) & p_2(t) \end{pmatrix} = p_1(t)\begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} + p_2(t)\begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} + \alpha(t)(i\omega-\eta)\sigma_+$$

$$+ \bar{\alpha}(t)(-i\omega-\eta)\sigma_-$$

$$\dot{p}_1(t) = -\gamma_1 p_1(t) + \gamma_2 p_2(t) \implies p_1(t) = p_1(0)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} + p_1^*\left[1-e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t}\right]$$

$$\dot{p}_2(t) = \gamma_1 p_1(t) - \gamma_2 p_2(t) \qquad p_2(t) = p_2(0)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t} + p_2^*\left[1-e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t}\right]$$

$$\alpha(t) = e^{(i\omega-\eta)t}\alpha(0) \qquad p_1^* = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} \quad p_2^* = \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$$

$$t\to\infty \quad \rho_t \to \begin{pmatrix} p_1^* & 0 \\ 0 & p_2^* \end{pmatrix}$$

Próxima aula: artigo Bogna?

Aula 2

Markovianidade: $\phi_{t,0} = \underbrace{\phi_{t,s}}_{CP} \underbrace{\phi_{s,0}}_{CP}$

Não-Markovianidade: $\phi_{t,0} = V_{t,s} \underbrace{\phi_{s,0}}_{CP}$

$V_{t,s} \downarrow$ P ou NP

• Mapas não divisíveis

* Como saber se um mapa é CPTP ou não?
* Por que dinâmicas não-Markovianas são interessantes?

CP $\longrightarrow (\mathbb{1}_n \otimes \phi)(\rho) \geqslant 0 \qquad \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n)$

d-P $\longrightarrow (\mathbb{1}_d \otimes \phi)(\rho) \geqslant 0 \qquad \rho' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_d \otimes \mathcal{H}_n)$

Isomorfismo de Choi-Jamiolkowski

$$\rho = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle\langle j|$$

$$\phi(\rho) = \sum_{ij} \rho_{ij}\, \phi(|i\rangle\langle j|)$$

Matriz Choi ou matiz dinâmica $\tau = \sum_{ij} |i\rangle_A |i\rangle_B \, {}_A\langle j| {}_B\langle j|$

$$\phi(\rho) = Tr_B\left(\tau\left(\mathbb{1} \otimes \rho^T\right)\right)$$

$$= Tr_B\left[\sum_{ij} \phi(|i\rangle_A\langle j|)\, |i\rangle_B\langle j| \left(\mathbb{1} \otimes \Sigma\, \rho_{j'i'} |i'\rangle_B\langle j'|\right)\right]$$

$$= \sum_{ij} \phi\, |i\rangle_A\langle j| \underbrace{\langle k|i\rangle}_{\delta_{ki}} \langle j| \rho_{j',i'} |i'\rangle \underbrace{\langle j'|k\rangle}_{\delta_{j'k}} \qquad j' = k = i \quad i' = j$$

$$= \sum_{ij} \rho_{ij}\, \phi(|i\rangle\langle j|)$$

Toda informação do mapa está contida na matriz de Choi, também chamada de matriz dinâmica!

Teorema (Choi): Um mapa linear ϕ é completamente positivo se e somente se a matriz dinâmica correspondente $\mathcal{D}_\phi$ é positiva.

$\Rightarrow$ Acho a matriz de Choi e com isso consigo checar os autovalores e verificar que são $\lambda_i \geq 0$

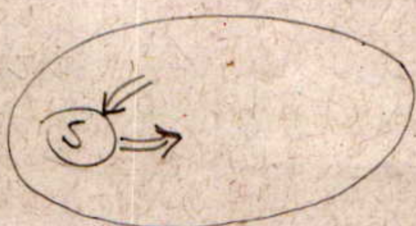
Mas para acharmos a matriz de Choi precisamos do mapa $\Rightarrow$ problema difícil: tomografia de processo

$\Rightarrow$ custoso experimentalmente

* Existem outros modos de descobrir se a dinâmica é NM?

* Qual é a vantagem em termos de processamento de informação de uma dinâmica NM?

<u>Recuperação de Informação</u> (Backflow de Informação)



Testemunha de NM: qualquer função contractiva

$$f(\phi_t(\rho), \phi_t(\sigma)) \leq f(\rho, \sigma) \quad \forall\ t > 0$$

Traço da Norma ou Norma-1

$\|\Delta\|_1 = Tr\sqrt{\Delta^+\Delta}$

Teorema: o mapa linear é positivo se e somente se para qualquer operador hermitiano Δ atuando em $\mathcal{H}$

$$\|\phi_t(\Delta)\|_1 \leqslant \|\Delta\|_1 .$$

Prova:

Assuma que $\mathcal{E}$ é positivo e que preserva o traço, então para qualquer operador positivo semidefinido $\Delta \geqslant 0$, o traço da norma é preservado, $\|\phi(\Delta)\|_1 = \|\Delta\|_1$.

Considere agora um operador que não é necessariamente positivo semidefinido, mas podemos separá-lo

$\Delta = \Delta^+ - \Delta^-$ $\longrightarrow$ $\Delta^+ \rightarrow$ matriz associada c/ os autovalores positivos

$\sum_i \lambda_i^+ |u_i^+\rangle\langle u_i^+| - \sum_i |\lambda_i^-| |u_i^-\rangle\langle u_i^-|$ $\quad \Delta^+,$

$$\|\phi(\Delta)\|_1 = \|\phi(\Delta^+) - \phi(\Delta^-)\|_1 \leq \|\phi(\Delta^+)\|_1 + \|\phi(\Delta^-)\| =$$
$$\|\Delta^+\| + \|\Delta^-\|$$
$$= \|\Delta\|_1$$

$\Rightarrow$ Se $V_{t,s}$ é CP $\rightarrow$ $\mathbb{1} \otimes V_{t,s}$ é positivo

$\|(\mathbb{1} \otimes V_{t,s})\Delta\| \leq \Delta$ $\qquad \Delta : \mathcal{L}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_a)$

Se $V_{t,s}$ é não CP $\Rightarrow$ existe pelo menos um op hermitiano onde isso é verdade

Como isto é útil para o processamento de Inf. Quântica?

$\Delta = q\rho_1 - (1-q)\rho_2$ (Qualquer op. hermitiano)

Distinguibilidade de estados

(Breuer, Laine, Piilo -
BLP PRL 103, 210401 (2009))

$q = 1/2$

$$\Delta = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$$

$$D(\rho_1, \rho_2) = \left\| \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{2} \right\|_1 \rightarrow \text{Markoviana}$$

$$D(\phi_t(\rho_1), \phi_t(\rho_2)) \leq D(\rho_1, \rho_2)$$

Não-Markovianidade
$\Rightarrow$ testemunha

Probabilidade de adivinhação

(Francesco Buscemi & Nilanjana Datta)
PRA 93, 012101 (2016)

Com a melhor escolha de $\hat{T}$, a menor probabilidade de erro no problema de discriminação de dois estados com uma medição é dado por

olhar essa prova

$$P_{erro}^{min} = \min_{0 \leq T \leq 1} \{(1-q)\,Tr[\rho_2 T] + q\,Tr[\rho_1(1 - T)]\} = \frac{1 - \|\Delta\|_1}{2}$$

$$Tr[\underbrace{(1-q)\rho_2 - q\rho_1}_{\Delta} T + q\rho_1]$$

$\Delta : \mathcal{L}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_a)$

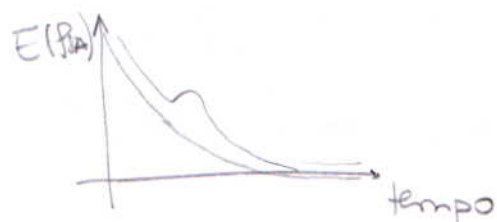
$P_g = 1 - P_{erro}^{min}$ $\longrightarrow$ logo se o mapa é NM existe pelo pelo menos um ensemble de estados $\mathcal{E} = \{\{q, \rho_1\}, \{(1-q), \rho_2\}\}$ em que a P_g vai aumentar

Contudo para uma dinâmica qualquer não é trivial achar qual é esse ensemble e qual é essa medição ótima

Método para achar esse estados: Mapas inversíveis e uso de ancilla.
Bogna Bylicka, Markus Johansson, Antonio Acín
PRL 118, 120501 (2017)

Emaranhamento

(RHP - Rivas, Huelga, Plenio)
PRL 105, 050403 (2010).



$\Phi \otimes \mathbb{1} (\rho_{SA}) \Rightarrow$ op local
não tem como aumentar o emaranhamento

$$I^{(E)} = \int_0^{t_{max}} \left| \frac{dE(\rho_{SA}(t))}{dt} \right| dt - \Delta E \rightarrow \text{testemunha}$$

$\Rightarrow$ Não testemunha sempre: - ex.: canais c/ quebra de emaranhamento

Entanglement negativity as a universal non-Markovianity witness $\longrightarrow$ mapa inversível + adição de ancilla
(Kolodynski, Rana, Streltsov)
arXiv: 1903.08663 (2019)

Outros tipos de testemunhas:

- distância de Bures
- entropia relativa
- informação de Fisher quântica
- capacidade do canal
- medida do volume esfera de Bloch

Grau de não-Markovianidade

$$\Phi_{t,0} = V_{t,s}\Phi_{s,0}$$

$\Rightarrow$ $V_{t,s}$ é k-positivo, se $V_{t,s}\otimes \mathbb{1}_k \geq 0$

$\Rightarrow$ mapa $\Phi_{t,0}$ é considerado ser k-divisível se e somente se $V_{t,s}$ é k-positivo

Def.:

Uma dinâmica $\Phi_{t,s}$ tem um grau de não-Markovianidade $NMD[\Phi_{t,0}] = m$ se e somente se $\Phi_{t,0}$ é $(d-m)$ mas não $(d-m-1)$-divisível.

Dinâmica Markoviana: $NMD[\Phi_{t,0}] = 0$

" não-Markoviana: $NMD[\Phi_{t,0}] \neq 0$ → forte $NMD[\Phi_{t,0}] = d$

→ fraca $NMD[\Phi_{t,0}] < d$

Implicações

Se $\Phi_{t,0}$ é k-divisível, então

$$\frac{d}{dt}\left\| (\mathbb{1}_k \otimes \Phi_{t,0})(\Delta) \right\|_1 \leq 0$$

para todos os operadores $\Delta : \mathcal{B}(\mathcal{H}_k \otimes \mathcal{H}_n)$.

Em particular se o mapa é k-divisível (c/ inversa)

$$\frac{d}{dt} \| \Lambda_t(X) \| \leq 0$$

$X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_d)$.

$\Rightarrow$ NM forte sempre será detectada nesse caso.

Ex

considere a eq. mestra de um qubit:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \gamma(t)\left[\sigma_z \rho(t) \sigma_z - \rho(t)\right]$$

com $\int_0^t \gamma(s)ds \geq 0$ para que a dinâmica seja CP.

Escolhendo $\rho(0) = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}$

Integrando

$$\rho(t) = \Phi_{t,0}(\rho(0)) = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} R(t) \\ \rho_{21} R(t) & \rho_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{com } R(t) = e^{-2\int_0^t \gamma(s)ds}$$

$$\Phi_t = T \exp \int_0^t \mathcal{L}_\tau d\tau$$

Note que $0 \leq R(t) \leq 1$.

Vamos computar a distância do traço para

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \rho_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D[\rho_1(t), \rho_2(t)] = \frac{1}{2} \| \rho_1^{(t)} - \rho_2^{(t)} \|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & R(t) \\ R(t) & 0 \end{bmatrix} \right\| = |R(t)| = R(t)$$

$$\frac{dD}{dt} = -2\gamma(t) R(t) \rightarrow > 0 \rightarrow \text{din } \boxed{NM}$$

$\gamma(t) < 0$