# AULA 3

## Modulo colisional


* Como podemos simular uma dinâmica $\Phi_t$ no cenário de modelos colisionais?

• Assumindo inicialmente que o sistema a cada interação interage com uma partícula nova do ambiente igualmente preparada

$$\boxed{W = w^{\otimes n}}$$

$$\rho_t = \Phi_t(\rho(0)) = \mathrm{Tr}_{amb}\Big[(U_n \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \mathbb{1})(\dots)(\mathbb{1} \otimes \dots \otimes U_1)$$
$$(\rho(0) \otimes w^{\otimes n})(U_1^\dagger \otimes \dots \mathbb{1})(\dots)(\mathbb{1} \dots \otimes U_n^\dagger)\Big]$$
$$= \Phi_{\Delta t}^{\otimes n}(\rho(0))$$

$U = e^{-iH\Delta t/\hbar} \Rightarrow$

Uma colisão $\rho(\Delta t) = \mathrm{Tr}_{amb}\left[U(\rho^{(0)} \otimes w)U^\dagger\right]$
$$= \Phi_{\Delta t}(\rho_0)$$

Simulando uma dinâmica Markoviana

Como usar esse formalismo para simular uma dinâmica NM?

Vamos analisar o exemplo que é bastante útil de 1 qubit:

$$\phi(\rho) = q_x \sigma_x \rho \sigma_x + q_y \sigma_y \rho \sigma_y + q_z \sigma_z \rho \sigma_z$$

onde $q_x, q_y, q_z > 0$ $(q_x q_y q_z \neq 0)$ $q_x + q_y + q_z = 1$.

(Note que é possível mostrar que qualquer mapa indivisível de 1-qubit é a menos de uma unitária equivalente a esse mapa)

→ Wolf. e Cirac Commun. Math. Phys. 279, 147 (2008).

Se $q_x = q_y = q_z = 1/3 \Rightarrow$ Quantum not gate

$$\rho \rightarrow \mathbb{1} - \rho$$

Uma colisão

$$\phi_1(\rho) = \mathrm{Tr}_{amb}[C(\rho \otimes \omega)C^\dagger]$$

onde $C = \sigma_x \otimes |x\rangle\langle x| + \sigma_y \otimes |y\rangle\langle y| + \sigma_z \otimes |z\rangle\langle z|$

⇒ Interação condicional 1 qubit + 1 qutrit

$\langle k|\omega|k\rangle = q_k$ c/ $k = x, y, z$

$\{|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle\}$ forma uma base ortonormal em $\mathcal{H}_3$

$C$ → não é só unitária, mas hermitiana

$$\hat{C}^2 = \sigma_x^2 |x\rangle\langle x| + \sigma_y^2 |y\rangle\langle y| + \sigma_z^2 \otimes |z\rangle\langle z| = \mathbb{1}_{2\times2} \otimes \mathbb{1}_{3\times3}$$

$$\hat{U}_\eta = e^{i\eta\hat{C}} = \cos\eta\, \hat{\mathbb{1}} + i\,\mathrm{sen}\,\eta\, \hat{C}$$

Posso reescrever isso como:

$$\hat{U}_\eta = \sum_k e^{i\eta\sigma_k} \otimes |k\rangle\langle k|$$

Vamos imaginar agora

<u>n colisões</u>

A evolução total é dada pela concatenação de vários $U_\eta$:

$$U_{\eta,1} \cdots U_{\eta,n} = \left(\sum_k e^{i\eta\sigma_k} \otimes |k\rangle\langle k|\right) \cdots \left(\sum_k e^{i\eta\sigma_k} \otimes |k\rangle\langle k|\right)$$

$$= \sum_k e^{in\eta\sigma_k} \otimes |k^{\otimes n}\rangle\langle k^{\otimes n}|$$

Suponha que o ambiente é preparado de forma que

$$\langle k^{\otimes n}|\omega_n|k^{\otimes n}\rangle = q_k.$$

$\langle xx|\omega|xx\rangle +$
$\langle yy|\omega|yy\rangle +$
$\langle zz|\omega|zz\rangle$
$\omega = |R\rangle\langle R|$

$\rho_k = \sum_k |kk\rangle\langle kk|$
$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|kk\rangle)$

Depois de $n$-colisões:

$$\phi_n(\rho) = \mathrm{Tr}_{amb}\left[(U_{\eta,1} \cdots U_{\eta,n})(\rho \otimes \omega_n)(U_{\eta,1} \cdots U_{\eta,n})^\dagger\right]$$

$$= \sum_k q_k\, e^{in\eta\sigma_k}\, \rho\, e^{-in\eta\sigma_k}$$

Vamos escolher $\boxed{\eta = \frac{\pi}{2n}}$

$\Rightarrow$ recuperamos o mapa

$$\phi(\rho) = q_x \sigma_x \rho \sigma_x + q_y \sigma_y \rho \sigma_y + q_z \sigma_z \rho \sigma_z$$

$\Rightarrow$ precisei de uma interação condicional

$\Rightarrow$ precisei de algum tipo de correlação no <u>ambiente</u>!

Podemos recuperar a eq. mestra:

$$\phi_j(\rho) = \sum_k q_k\, e^{i\pi j/2n\, \sigma_k}\, \rho\, e^{-i\pi j/2n\, \sigma_k}$$

$$= \cos^2\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\rho + \sin^2\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\sum q_k \sigma_k \rho \sigma_k + \frac{i}{2}\sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)\sum q_k [\sigma_k, \rho]$$

$$\phi_t(\rho) = \phi + \cos^2(\alpha t)\,(\mathbb{1} - \phi) + \sin\alpha(t)\cos(\alpha t)\,\mathcal{F}$$

$$\phi = \sum \sigma_k \rho \sigma_k$$

$\mathcal{E}_0 = \mathbb{1}$ $\qquad \mathcal{F}(\cdot) = [i\sum_k q_k \sigma_k, \cdot\,]$ $\qquad \alpha = \frac{\pi}{2n}$

$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \frac{d\phi_t \phi_t^{-1}(\rho_t)}{dt} = \mathcal{L}_t(\rho_t)$$

$\rho_t = \phi_t(\rho)$ $\qquad \phi_t = e^{\mathcal{L}t}$ $\qquad \phi_t \phi_t^{-1}(\rho_t) = \phi_t(\rho)$

$$\mathcal{L}_t(X) = \frac{i}{\hbar}\sum_j h_j [X, \sigma_j] + \frac{1}{2} g_{jk}\left([\hat{\sigma}_j, X\hat{\sigma}_k]\right) + [\hat{\sigma}_j X, \sigma_k])$$

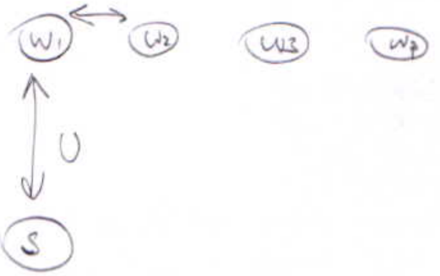
depende de $g_{jk}$ se a dinâmica é Markoviana ou não

$\Rightarrow$ está com $t'$.

Vantagem do modelo: - conseguimos claramente isolar o que é efeito da interação ou do ambiente.

Existem basicamente dois tipos diferentes de modelo colisional:

- Criando correlação durante a dinâmica




1) $\hat{U}_{Si} = e^{-iH_{Si}\tau} \longrightarrow$ mapa $\mathcal{U} = U \rho U^{\dagger}$

2) Operação de Swapping entre as partículas do ambiente

$\rho_S = \rho_0$

$W_{amb} = |0^{\otimes n}\rangle\langle 0^{\otimes n}|$

$$\Phi_{swap}^{i+1,i}[\cdot] = (1-p)(\cdot) + p\, S_{i+1,i}(\cdot)\hat{S}_{i+1,i}$$

$S \to$ swap
$|00\rangle\langle 00|$
$|01\rangle\langle 10|$
$|10\rangle\langle 01|$
$|11\rangle\langle 11|$

$$\sigma_n = \left(\mathcal{U}_{S_n} \circ \Phi_{swap}^{n,n-1} \ldots \circ \mathcal{U}_{S_2} \circ \Phi_{swap}^{2,1} \circ \mathcal{U}_{S_1}\right)[\rho_0]$$

$$\sigma_n = (1-p)\sum_{j=1}^{n-1} p^{j-1}\,\mathcal{U}_{S_n}^{j}[\sigma_{n-j}] + p^{n-1}\,\mathcal{U}_{S_n}^{n}[\sigma_0]$$

$\mathcal{U}_{S_n}^{j}[\sigma] = e^{iH(S_n)j\tau}\,\sigma\, e^{-iH(S_n)j\tau}$

$$\rho_{S_n} = (1-p)\sum_{j=1}^{n-1} p^{j-1}\,\phi_j[\rho_{n-j}] + p^{n-1}\phi_n[\rho_0]$$

$$\phi_j[\rho] = \mathrm{Tr}_B\left[\mathcal{U}_{S_n}^{j}\left(\rho \otimes |00\ldots\rangle\langle 00\ldots 0|_B\right)\right]$$

* Mostrar $p=0$!

• Ambiente já foi preparado em estado c/ correlação

* Será que só correlação é suficiente para gerar uma dinâmica NM?

Interação condicional: $\hat{H} = \eta \left( \mathbb{1} \otimes |0\rangle_{amb}\langle 0| + \sum_i \sigma_i |i\rangle_{amb}\langle i| \right)$

$i = x, y, z$

<u>Uma colisão</u> $\omega = (1 - \sum p_i) |0\rangle\langle 0| + \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$

$0 < p_i < 1$

$0 \leq \sum p_i \leq 1$

$$U(\tau) = \cos(\eta\tau) - i \frac{H}{\eta} \operatorname{sen}(\eta\tau)$$

$$\rho(t+\tau) = \mathrm{Tr}_{Amb}\left[ U(\tau) (\rho(t) \otimes \omega) U(\tau)^{\dagger} \right]$$

$$= (1 - \sum p_i) \rho(t) + \sum_i p_i \sigma_i (\rho(t)) \sigma_i$$

Cenário mais simples $\Rightarrow$ duas colisões

$\omega = |R_2\rangle\langle R_2|$

$$|R_2\rangle = (1 - p_1 - p_2) |00\rangle + \sqrt{1 - p_1 - p_2} \left( \sqrt{p_1} |01\rangle + \sqrt{p_2} |02\rangle \right)$$

$$+ \sqrt{p_1} \sqrt{1 - 2[q p_1 (1-q) p_2]} |10\rangle$$

$$+ \sqrt{p_2} \sqrt{1 - 2[q p_2 + (1-q) p_1]} |20\rangle +$$

$$+ \sqrt{2(1-q) p_1 p_2} \left( |12\rangle + |21\rangle \right) + \sqrt{2q} \left( p_1 |11\rangle + p_2 |22\rangle \right)$$

$$\rho(t+2\tau) = Tr_{AMB}\left[U(\tau)U(\tau)\left(\rho(t)\otimes|R_2\rangle\langle R_2|\right)U^{\dagger}(\tau)U^{\dagger}(\tau)\right]$$

$$= (1-p_1-p_2)\left[(1-p_1-p_2)\rho(t) + p_1\sigma_1\rho(t)\sigma_1 + p_2\sigma_2\rho(t)\sigma_2\right]$$

$$+2q(p_1^2+p_2^2)\rho(t) + p_1\left\{1-2\left[q p_1+(1-q)p_2\right]\right\}\sigma_1\rho(t)\sigma_1$$

$$+p_2\left\{1-2\left[q p_2+(1-q)p_1\right]\right\}\sigma_2\rho(t)\sigma_2 + 2(1-q)p_1p_2\left(\sigma_1\sigma_2\,\rho(t)\sigma_2\sigma_1 + \sigma_2\sigma_1\,\rho(t)\sigma_1\sigma_2\right)$$

Imagine um único canal

$p_1 = p_2 = p$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$$\rho(t+2\tau) = (1-2p)\left[(1-2p)\rho(t) + 2p\,\sigma\rho\sigma\right]$$
$$+2q(2p^2)\rho(t) + 2p\left\{1-2\left[qp+(1-q)p\right]\right\}\sigma\rho\sigma + 2(1-q)p^2(2\rho)$$

$$= (1-2p)\left[\rho(t+\tau)\right] + 4p^2(t) + 2p\left\{1-2p\right\}\sigma\rho\sigma =$$

$$= (1-2p)\left[\rho(t+\tau)\right] + 2p\underbrace{\left[2p\rho(t) + (1-2p)\sigma\rho(t)\sigma\right]}_{\sigma\rho(t+\tau)\sigma = (1-2p)\sigma\rho(t)\sigma + 2p\rho(t)}$$

$\Rightarrow$ Dinâmica Markoviana.

Como

# AULA 4

- Experimentos de NM em informação quântica:
  - maioria é uma simulação do efeito de um ambiente
    plataforma mais usada: ótica

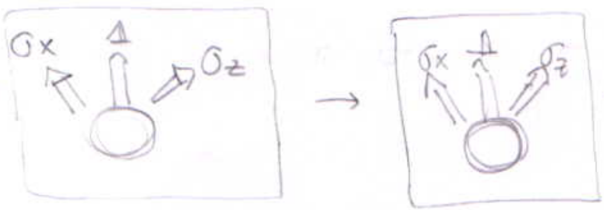
    sistema: grau de polarização do fóton

    efeito do amb.: - caminho (uso de divisor de feixe)
    - algum outro grau de liberdade do fóton (frequência)

- Ressonância Magnética Nuclear

Ex. modelo colisional ⇒ Transição Mark. → NM → essencial NM forte?

NKB, Carvalho, Monken, Santos PRA 90, 032111 (2014)

$\rho(0) \longrightarrow$  $\longrightarrow \rho(2)$


Uma colisão

$$\rho(1) = \underbrace{p_0 \rho + p_x \sigma_x \rho \sigma_x + p_z \sigma_z \rho \sigma_z}_{\phi_{10}(\rho) =}$$

Duas colisões

$$\rho(2) = \phi_{20}(\rho) = \sum_{i,j=x,y,z} p_{ij}\, O_i O_j \rho O_j O_i$$

$O_0 = \mathbb{1}$, $O_x = \sigma_x$, $O_y = \sigma_y$
$O_z = \sigma_z$

## Markoviana

$p_{ij} = p_i p_j$

$\Phi_{20}(\rho) = \Phi_{30}(\Phi_{10}(\rho))$

## Não Markoviana

$p_x = p_z = 1/2$

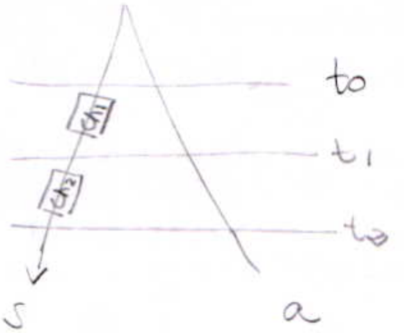
$p_{xx} = p_{zz} = 1/2$

$\rho(0) = \rho$

$$\rho(1) = \frac{\sigma_x \rho \sigma_x + \sigma_z \rho \sigma_z}{2}$$

$\rho(2) = \rho$

## Setup Experimental




$p_0 = (1-2\varepsilon)$, $p_x = p_z = \varepsilon$

$p_{00} = (1-2\varepsilon)^2$, $p_{0x} = p_{0z} = p_{x0} = (1-2\varepsilon)\varepsilon$

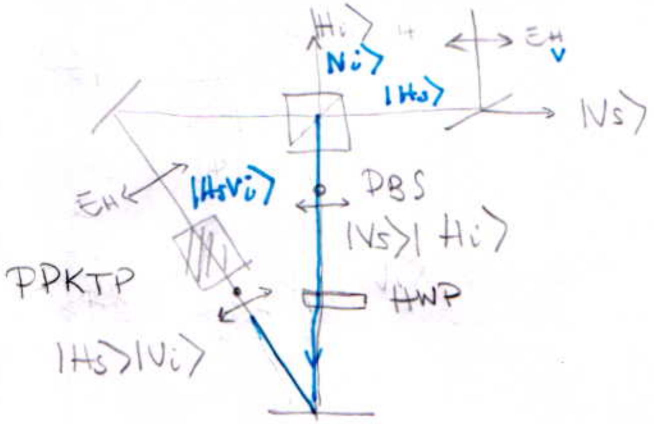
$p_{xx} = p_{zz} = 2\varepsilon^2$

$(p_{xz} = p_{zx} = 0)$ opção

$\varepsilon$ está relacionado com o tempo que o cristal líquido está "ligado"

controlado por voltagem

Como gerar o estado emaranhado? Interferômetro de Sagnac + cristal não-linear




$\Rightarrow$ se inicio o estado

$$\frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ gero

$$\frac{|H_i V_s\rangle + |V_i H_s\rangle}{\sqrt{2}}$$