Mecânica Clássica 1 - Lista 1

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 14/10/2015 (quarta-feira).

Leitura: Landau capítulos 1 e 2; Feynman Lectures, Vol 2. capítulo 19; Goldstein capítulos 1 e 2.

1) (1,5 pontos) Derivação geral das equações de Euler-Lagrange

Considere um sistema descrito por s coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_s$. A Lagrangiana será, em geral, uma função das s coordenadas q_i e das s velocidades $\dot{q}_i$, além do tempo,

$$L = L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t) \tag{1}$$

(L pode depender do tempo, por exemplo, se tivermos uma força dependente do tempo). A ação será um funcional das s trajetórias

$$S[q_1(t), \ldots, q_s(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

(a) Use o princípio da mínima ação para encontrar as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, s \tag{3}$$

Dica de sucesso: esse problema é idêntico ao que eu fiz em sala, exceto que agora há mais de uma variável. Repita os mesmos procedimentos com uma variação do tipo $q_1(t) + \eta_1(t), \ldots, q_s(t) + \eta_s(t)$, e use o fato de que os η_i variam de forma independente.

(b) Mostre que duas Lagrangianas que diferem somente por uma função do tipo

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q_1, \ldots, q_s, t) \tag{4}$$

produzem as mesmas equações do movimento. Dica: mostre que as ações correspondentes diferem apenas por uma função das extremidades e, portanto, não influenciam na variação δS.

2) (1,5 pontos) Coordenadas cilíndricas

A posição de uma partícula em coordenadas cilíndricas lê-se

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

$$z = z$$

(a) Expresse a energia cinética $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ em coordenadas cilíndricas

(b) Encontre os momentos generalizados associados às variáveis r, ϕ e z.

(c) Mostre que o momento angular referente à direção z pode ser escrito como

$$J_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi$$

(d) Suponha que essa partícula está sujeita a um potencial $U(z)$. Liste as grandezas conservadas mais importantes do problema.

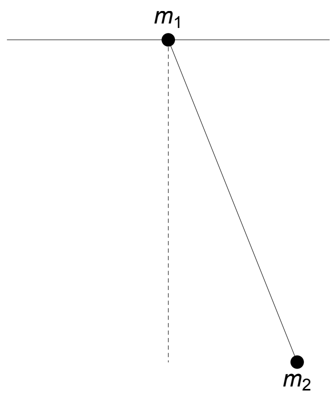

Figura 1

3) (1,5 pontos) Encontre a Lagrangiana

Considere um sistema como o ilustrado na figura 1. Uma partícula de massa m_1 é livre para se mover na direção horizontal e, acoplada a ela, há outra partícula de massa m_2 que pode oscilar no plano da folha.

(a) Decida quais são as coordenadas generalizadas relevantes ao problema e faça um diagrama mostrando qual sistema de coordenadas você escolheu.

(b) Encontre a Lagrangiana em termos das coordenadas generalizadas.

(c) Encontre os momentos generalizados associados às coordenadas que você escolheu.

(d) Quais coordenadas são cíclicas? E quais são as grandezas conservadas associadas?

(e) Obtenha uma expressão para a energia do sistema.

(f) Suponha agora que a massa m_1 move-se com velocidade constante v. Mostre que, exceto pela derivada total de uma função das coordenadas e do tempo [vide Eq. (4)], a Lagrangiana resultante é simplesmente a Lagrangiana de um pêndulo. Explique o motivo.

4) (2 pontos) Encontre a Lagrangiana 2

Considere um sistema como o ilustrado na figura 2. Um pêndulo de massa m e comprimento ℓ está fixo em um suporte que se move em um círculo de raio a com frequência constante Ω. Ou seja, o ângulo θ na figura varia de acordo com $\theta = \Omega t$. Encontre a Lagrangiana. Simplifique seu resultado ao máximo usando a Eq. (4).

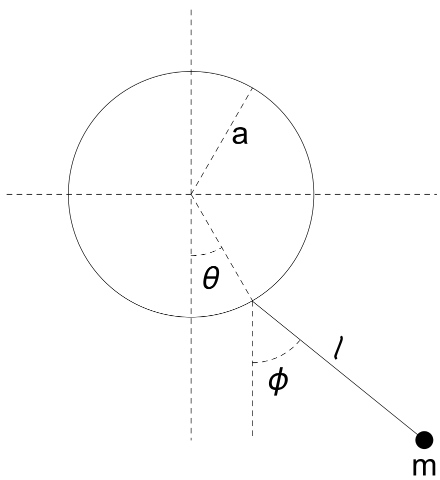

Figura 2

5) (1 ponto)Atrito

O formalismo Lagrangiano não é muito conveniente para tratar forças não conservativas. No entanto, existem certos casos onde isso pode ser feito tratando a Lagrangiana como sendo explicitamente dependente do tempo. Considere a seguinte Lagrangiana:

$$L = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)$$

Use as equações de Euler-Lagrange para encontrar as equações do movimento. Você certamente já viu essas equações antes. Em qual sistema?

6) (2,5 pontos) Lagrangiana de uma partícula relativística na presença de um campo eletromagnético

O campo eletromagnético pode ser descrito pelo potencial escalar $\phi(x, y, z, t)$ e o potencial vetor $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$. A partir deles obtemos os campos elétricos e magnéticos por meio das equações,

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

A Lagrangiana de uma partícula relativística se movendo na presença do campo eletromagnético é

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\left[\phi(x, y, z) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right] \tag{5}$$

(a) Feche os olhos e se convença de que as equações de Euler-Lagrange também valem para esta Lagrangiana. Afinal, a única suposição é a de que L depende de $\boldsymbol{r}$ e $\dot{\boldsymbol{r}}$.

(b) Mostre que na presença do potencial vetor, o momento generalizado associado às coordenadas $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ se tornam

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + q\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ou seja, na presença do potencial vetor o momento generalizado se torna o "momento cinemático" $\boldsymbol{p}$ mais um novo termo. Moral da história: nem sempre o momento generalizado é intuitivo. Temos que confiar na definição.

(c) Mostre que a energia do sistema será

$$E = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{P} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\phi$$

Ou seja, ela não depende do potencial vetor $\boldsymbol{A}$.

(d) A simetria mais importante do campo eletromagnético é a invariância de Gauge. Uma transformação de Gauge do campo eletromagnético lê-se

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda$$

onde Λ é uma função escalar arbitrária de x, y, z e t. Use a Eq. (4) para mostrar que a Lagrangiana (5) possui invariância de Gauge, contanto que a carga q não mude no tempo.

(e) (Desafio) Mostre que as equações do movimento são dadas pela *força de Lorentz*:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

Dica de sucesso: cuidado ao calcular $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$. Isso representa a derivada total e $\boldsymbol{A}$ depende também de $\boldsymbol{r}(t)$.

7) (3 pontos extras) Desafio: Lagrangiana de Schrödinger

A coordenada de um sistema $q(t)$ é uma função apenas do tempo. Sistemas mais gerais são descritos por *campos*; ou seja, por funções que dependem também da posição, por exemplo $\psi(x,t)$. A Lagrangiana dependerá em geral da variável em questão, que neste caso é o campo ψ, além de suas derivadas (neste caso $\partial_t\psi$ e $\partial_x\psi$). Portanto a ação será dada por

$$S[\psi(x,t)] = \int L(\psi, \partial_t\psi, \partial_x\psi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

(a) Use o princípio da mínima ação para mostrar que a equação de Euler-Lagrange neste caso se torna

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - \partial_t\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_t\psi)}\right) - \partial_x\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_x\psi)}\right) = 0$$

Se você possui uma Lagrangiana que depende de mais de um campo, basta colocar índices ψ_i nesta equação.

(b) Considere agora a Lagrangiana de Schrödinger

$$L = \frac{i}{2}\Big[\psi^\dagger(\partial_t\psi) - (\partial_t\psi^\dagger)\psi\Big] - \frac{1}{2m}(\partial_x\psi^\dagger)(\partial_x\psi) - V\psi^\dagger\psi$$

Ela depende de dois campos: ψ e $\psi^\dagger$. Trate-os como campos independentes. Além disse, V é uma função qualquer. Mostre que a equação de Euler-Lagrange para $\psi^\dagger$ é a equação de Schrödinger

$$i\partial_t\psi = \frac{1}{2m}\partial_x^2\psi + V\psi$$

(eu estou usando $\hbar = 1$).

(c) (Super desafio) É possível ver que a Lagrangiana de Schrödinger possui invariância por uma transformação de fase global:

$$\psi \to e^{i\theta}\psi, \qquad \psi^\dagger \to e^{-i\theta}\psi^\dagger$$

Ela reflete o fato de que a grandeza observável não é ψ em si, mas $|\psi|^2 = \psi^\dagger\psi$. A grandeza associada a essa simetria é o número de partículas, o que faz sentido já que sabemos que na mecânica quântica partículas não podem ser criadas nem destruídas. Eu quero que você mostre isso. Para tal, utilize a transformação infinitesimal $e^{i\theta} \simeq 1 + i\theta$ e verifique que, em primeira ordem, a variação da Lagrangiana implica na equação de continuidade,

$$i\delta L = \partial_t\rho + \partial_x J = 0$$

onde

$$\rho = \psi^\dagger\psi, \qquad J = \frac{i}{2m}[(\partial_x\psi^\dagger)\psi - \psi^\dagger(\partial_x\psi)]$$