Mecânica Clássica 1 - Lista 2

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 04/11/2015 (quarta-feira).

Leitura: Landau capítulo 3. Thornton & Marion, capítulos 1, 2, 8 e 9.

Regras do jogo:

- Você pode usar o Wolfram Alpha, ou seu aplicativo preferido, para calcular integrais. Mas (i) deixe muito claro qual integral você usou como entrada e qual foi o resultado; (ii) simplifique e interprete o resultado fornecido pelo programa.
- Em diversos problemas você deverá usar o algoritmo de Velocity-Verlet para integrar as equações do movimento numericamente. A receita do algoritmo é:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{F(x(t))}{2m}\Delta t^2$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \left[\frac{F(x(t)) + F(x(t+\Delta t))}{2m}\right]\Delta t$$

  - O valor de Δt deve ser escolhido por conveniência.
  - Como resposta eu quero x em função de t na forma de um gráfico (digital ou analógico).
  - Você não precisa usar nenhum programa sofisticado para implementar esse algoritmo (se quiser pode usar a calculadora do seu celular). Mas, claro, recomendo a todos que implementem ele na sua linguagem favorita, tendo em vista que ele é bastante simples.
  - Fica a seu cargo escolher o melhor valor de Δt. O recomendado é repetir a simulação com pelo menos dois valores de Δt para verificar que os resultados não se modificam. Dessa forma você pode ter certeza de que o fenômeno físico que você está observando não é um artifício da escolha do Δt. Não esquece de escrever, no seu gráfico, qual foi o valor de Δt utilizado.
  - Fica a seu cargo também escolher o valor de tempo final t_f até onde a simulação será rodada. Seja razoável: escolha valores que permitam você ver e interpretar a física do problema.

1) (1 ponto) Velocidade crítica 1

Considere uma partícula sujeita a um potencial

$$U(x) = ax^2 - bx^3$$

onde a e b são constantes positivas.

(a) Esboce um gráfico desse potencial. Calcule os zeros, máximos e mínimos do potencial (em função de a e b) e identifique-os no gráfico.

(b) Suponha que o movimento começa na origem. Mostre que existe uma velocidade crítica v_c tal que, se $|v(0)| < v_c$, o movimento será finito e, caso contrário, ele será infinito.

2) (1 ponto) Velocidade crítica 2

Considere uma partícula sujeita a uma interação do tipo

$$U(x) = -8U_0 a^2 \frac{(a^2 - x^2)}{8a^4 + x^4}$$

Esta é uma interação típica de uma partícula α dentro de um núcleo.

(a) Esboce um gráfico de $U(x)$ e determine os tipos possíveis de movimento, em função da energia.

(b) Suponha que a partícula começa o seu movimento em $x = -\infty$ com velocidade v_0. Calcule o menor valor possível de v_0 para que a partícula seja capaz de atravessar o potencial e seguir para $x = +\infty$.

(c) Use o algoritmo de Velocity Verlet para calcular a trajetória, supondo unidades reduzidas $U_0 = m = a = 1$. Tome como condições iniciais $x_0 = -10$ e $v_0 = 1$.

(d) Repita o procedimento para $v_0 = 1.5$.

3) (1 ponto) Poços de potencial

(a) Calcule o período de oscilação de uma partícula em um poço infinito

$$U(x) = \begin{cases} 0 & -a < x < a \\ \infty & |x| > a \end{cases}$$

(b) Calcule o período de oscilação de uma partícula sujeita ao potencial $U(x) = k|x|$.

4) (1 ponto) Potencial do bronze

Considere o potencial $U(x) = U_0 \tan^2(\alpha x)$.

(a) Esboce um gráfico do potencial e discuta os tipos de movimento.

(b) Calcule o período de oscilação. Forneça sua resposta em termos da energia E. Faça um gráfico e discuta o seu resultado.

(c) Considere o que acontece quando x e E são pequenos. Mostre que neste caso tanto $U(x)$ quanto $T(E)$ tendem aos resultados do oscilador harmônico.

(d) Use o algoritmo de Velocity Verlet para estudar o movimento. Use variáveis reduzidas (tudo = 1) e tome como condições iniciais $x(0) = 1.4$ e $v(0) = 0$. Interprete seu resultado e compare o período obtido da simulação com o período calculado em (b).

5) (1 ponto) Saturno V

O objetivo deste problema é integrar numericamente a trajetória do primeiro estágio do foguete Saturno V, levando em conta a força gravitacional. A massa inicial do foguete era $M = 2.8 \times 10^6$ kg, sendo que só de combustível do primeiro estágio tínhamos $M_f = 2.1 \times 10^6$ kg. Assuma uma velocidade de exaustão $u = 2600$ m/s e uma taxa de consumo do combustível de $\alpha = 1.4 \times 10^4$ kg/s. Ambos podem ser tomadas como constantes ao longo do movimento. Considere o movimento descrito pela equação

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{GM}{x^2} - \frac{u}{m(t)}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

Com condições iniciais $x(0) = R$ (o raio da Terra) e $v(0) = 0$.

(a) Calcule o tempo t_b até todo o combustível ser queimado.

(b) Use o algoritmo de Velocity Verlet para calcular a trajetória entre $t = 0$ e t_b. Qual a altura do foguete no final do primeiro estágio? E qual a velocidade?

(c) Pergunta: faria muita diferença ter usado mg como força gravitacional, ao invés da expressão completa GMm/x^2?

6) (1 ponto) Rotações e coordenadas esféricas

Para descrever uma rotação precisamos definir o ângulo de rotação θ e a direção ao redor da qual estamos. Esta última pode ser descrita por um versor $\boldsymbol{n}$. Na aula vimos como realizar rotações em torno dos eixos x, y e z. Uma fórmula geral para a rotação em torno de uma direção arbitrária $\boldsymbol{n}$ é:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}) \sin\theta + \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r})(1 - \cos\theta) \tag{1}$$

(a) Verifique que essa fórmula se reduz ao resultado derivado em sala para rotações infinitesimais.

(b) Um versor $\boldsymbol{w}$ em coordenadas esféricas é em geral parametrizado como

$$w_x = \sin\theta\cos\phi$$

$$w_y = \sin\theta\sin\phi$$

$$w_z = \cos\theta$$

Use a Eq. (1) para mostrar que podemos chegar no versor $\boldsymbol{w}$, partindo do versor $(0, 0, 1)$ e usando duas rotações em torno dos eixos cartesianos. Explique quais são os eixos e os ângulos de rotação, e verifique explicitamente que o procedimento funciona.

(c) Suponha que temos dois pontos na esfera, $\boldsymbol{w}_1$ e $\boldsymbol{w}_2$. Sobre qual direção e com qual ângulo devemos rodar $\boldsymbol{w}_1$ para chegar a $\boldsymbol{w}_2$? Resposta:

$$\theta = \arccos(\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2), \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2}{|\boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2|}$$

Pense, sem fazer nenhuma conta, se isso faz sentido (A interpretação de θ é mais simples. A de $\boldsymbol{n}$, nem tanto.). Em seguida verifique usando a Eq. (1) que isso de fato funciona.

7) (1 ponto) Rotações e as transformações de Lorentz

O principal postulado da teoria da relatividade é que nada se propaga mais rápido que a luz (com velocidade c). Isso significa que se um objeto se propaga com c em um referencial inercial, ele também vai se propagar com c em qualquer outro referencial inercial. Considere dois referenciais inerciais R e R' que se movem um em relação ao outro com uma velocidade relativa V na direção x. Seja (x, t) a posição e o tempo no referencial R e (x', t') o equivalente no referencial R'. É possível demonstrar que a principal consequência do fato de c ser o mesmo em qualquer referencial inercial é que

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 \tag{2}$$

Essa diferença $(ct)^2 - x^2$ é chamada de **intervalo**. Portanto, o intervalo é uma grandeza independente do referencial inercial escolhido. Note a semelhança disso com rotações. Vimos que rotações preservam o módulo de um vetor: $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. A diferença aqui é o sinal de menos.

(a) Mostre que a invariância da Eq. (2) é garantida por uma transformação:

$$x = x'\cosh\theta + ct'\sinh\theta$$

$$ct = x'\sinh\theta + ct'\cosh\theta$$

Isso é o equivalente a uma rotação por um ângulo imaginário.

(b) Queremos agora determinar a relação entre θ e a velocidade relativa V entre os dois referenciais. Para isso considere o ponto especial $x' = 0$. Isso significa que no referencial R' a partícula está em repouso na origem. Consequentemente, no referencial R a partícula se move com velocidade V. Use as equações do item anterior e o fato de que, neste caso $x/t = V$ para mostrar que

$$\tanh\theta = \frac{V}{c}$$

(c) Conclua que a transformação entre os dois referenciais lê-se

$$x = \gamma(x' + Vt'), \qquad t = \gamma(t' + \frac{V}{c^2}x'), \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Essas são as transformações de Lorentz, que formam a base da teoria da relatividade.

(d) Verifique que no limite $V \ll c$ as transformações de Lorentz se reduzem às transformações de Galileo.

8) (1,5 pontos) Elipsógrafo de Arquimedes

Na primeira lista você calculou a Lagrangiana e outras propriedades do problema descrito na figura 1. A Lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\ell^2\dot{\phi}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) + m_2 g\ell\cos\phi$$

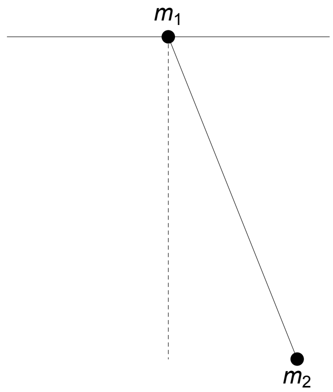

Figura 1

(a) Como a coordenada x é cíclica, seu momento conjugado é conservado:

$$p_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2\ell\dot{\phi}\cos\phi = \text{constante}$$

Eu argumento que é sempre possível escolher essa constante como sendo zero devido à flexibilidade na escolha do referencial. Explique por que isso é verdade. Em seguida use este fato para expressar x em função de ϕ. Expresse seus resultados em termos de $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$.

(b) Use os resultados do item anterior para mostrar que x_2 e y_2 podem ser parametrizados como

$$x_2 = \ell(1 - \mu)\sin\phi, \qquad y_2 = \ell\cos\phi$$

Essas são as equações paramétricas de uma elipse:

$$\frac{x_2^2}{\ell^2(1-\mu)^2} + \frac{y_2^2}{\ell^2} = 1$$

Portanto, o movimento da partícula de massa m_2 formará uma elipse. Esse "dispositivo" é conhecido como *elipsógrafo de Arquimedes*. O Archimedes entendeu isso 2300 anos atrás, sem Lagrangiana, sem leis de Newton, sem cálculo, sem nada.

(c) Mostre que a equação do movimento para ϕ pode ser escrita como

$$(1 - \mu\cos^2\phi)\ddot{\phi} = -\omega_0^2\sin\phi - \mu\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi$$

onde $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$.

(d) Mostre que a energia do sistema pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2} m_2 \ell^2 \left\{ \dot{\phi}^2 \left(1 - \mu \cos^2 \phi\right) - 2\omega_0^2 \cos \phi \right\}$$

Use isso para obter uma solução formal do problema em termos de uma integral para $t(\phi)$.

9) (1,5 pontos) Pêndulo esférico

Considere um pêndulo esférico: uma partícula livre para se mover sobre a superfície de uma esfera de raio ℓ, sujeita à ação da gravidade.

(a) Encontre a energia E e o potencial efetivo U_e em função do ângulo polar θ somente. Ou seja, elimine a variável ϕ usando leis de conservação.

(b) Faça um gráfico de $U_e(\theta)$ e discuta os possíveis tipos de movimento.

(c) Encontre a equação de movimento para θ.

(d) Obtenha as equações paramétricas do movimento $t(\theta)$ e $\phi(\theta)$.