Mecânica Estatística - Lista 2

1) Simetria

Como X, Y e Z são iid,

$$\left\langle \frac{X}{X+Y+Z} \right\rangle = \left\langle \frac{Y}{X+Y+Z} \right\rangle = \left\langle \frac{Z}{X+Y+Z} \right\rangle$$

Mas

$$\left\langle \frac{X+Y+Z}{X+Y+Z} \right\rangle = 1$$

Portanto

$$\left\langle \frac{X}{X+Y+Z} \right\rangle = 1/3$$

4) Distribuição lognormal

$$P_D(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_d d} \exp\left\{ - \frac{\ln^2(d/d_0)}{2\sigma_d^2} \right\}$$

A função $V = \pi D^3/6$ é 1-para-1 portanto

$$P_V(v) = P_D(d) \left| \frac{dd}{dv} \right|$$

Mas

$$v'(d) = \frac{\pi d^2}{2}$$

Portanto

$$P_V(v) = \frac{2}{\pi d^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_d d} \exp\left\{ - \frac{\ln^2(d/d_0)}{2\sigma_d^2} \right\}$$

Agora basta expressar d em termos de v.

$$\frac{\pi d^3}{2} = 3\,\frac{\pi d^3}{6} = 3\,v$$

Seja
$$v_0 = \frac{\pi d_0^3}{3}$$

Então
$$\ln(d/d_0) = \ln\left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^{1/3}\right] = \frac{1}{3}\ln(v/v_0)$$

Assim
$$P_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(3\sigma_d v)} \exp\left\{ -\frac{\ln^2(v/v_0)}{2(3\sigma_d)^2} \right\}$$

Comparando com a estrutura da lognormal vemos que $P_v(v)$ também é lognormal, mas com parâmetros $v_0 = \pi d_0^3/6$ e $\sigma_v = 3\,\sigma_d$.

3) Duas partículas quânticas

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi x_0^2}\left(\frac{x_2 - x_1}{x_0}\right)^2 e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{x_0^2}} \tag{3.1}$$

(a) Para encontrar o máximo, eu derivo com relação a x_1 e x_2:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{2}{\pi x_0^2}\left(\frac{x_2 - x_1}{x_0}\right)\left(-\frac{1}{x_0}\right) e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{x_0^2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi x_0^2}\left(\frac{x_2 - x_1}{x_0}\right)^2 \left(-\frac{2x_1}{x_0^2}\right) e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{x_0^2}}.$$

$$= \frac{2}{\pi x_0^2} e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{x_0^2}} \frac{(x_1 - x_2)}{x_0^4}\left[x_0^2 - x_1(x_1 - x_2)\right] \tag{3.2}$$

A derivada com relação a x_2 será análoga. Basta trocar x_1 por x_2. Portanto as relações

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \tag{3.3}$$

serão satisfeitas quando $x_1 = x_2$ ou quando

$$x_0^2 - x_1(x_1 - x_2) = 0 \tag{3.4}$$

$$x_0^2 - x_2(x_2 - x_1) = 0 \tag{3.5}$$

O caso $x_1 = x_2$ corresponde a um mínimo pois $p(x_1, x_1) = 0$.
Resolvendo para o outro caso obtemos

$$x_1(x_1 - x_2) = x_0^2$$
$$x_2(x_1 - x_2) = -x_0^2$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{x_2} = -1 \quad \leadsto \quad x_1 = -x_2 \tag{3.6}$$

Além disso, da (3.4) temos

$$x_0^2 + x_2(-x_2 - x_2) = 0$$

$$x_2^2 = \frac{x_0^2}{2} \qquad (3.7)$$

Portanto, os pontos de máximo vão ocorrer em

$$\boxed{(x_1, x_2) = x_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ou} \quad x_0\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \qquad (3.8)$$

(b) Para encontrar $p(x_1)$, integramos sobre x_2:

$$p(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\,dx_2 = \frac{1}{\pi x_0^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right)^2 e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{x_0^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi x_0^2}\, e^{-x_1^2/x_0^2}\, \frac{1}{x_0^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\,(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)\, e^{-x_2^2/x_0^2} \qquad (3.9)$$

Essas são integrais Gaussianas. Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, x_1^2\, e^{-x_2^2/x_0^2} = x_1^2\sqrt{\pi x_0^2} \qquad (3.10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, 2x_1x_2\, e^{-x_2^2/x_0^2} = 0 \quad \text{(por simetria)} \qquad (3.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, x_2^2\, e^{-ax_2^2} = -\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, e^{-ax_2^2}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}} \qquad (3.12)$$

Fazendo $a = 1/x_0^2$ obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \, x_2^2 \, e^{-x_2^2/x_0^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_0^3 \tag{3.13}$$

Portanto (3.9) se torna

$$p(x_1) = \frac{1}{\pi x_0^2} e^{-x_1^2/x_0^2} \frac{1}{x_0^2} \left[x_1^2 \, x_0 \sqrt{\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_0^3 \right]$$

$$\therefore \quad \boxed{p(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x_0} e^{-x_1^2/x_0^2} \left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{1}{2} \right)} \tag{3.14}$$

A dist. marginal de x_2 deve ser semelhante, por simetria

$$\boxed{p(x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x_0} e^{-x_2^2/x_0^2} \left(\frac{x_2^2}{x_0^2} + \frac{1}{2} \right)} \tag{3.15}$$

As variáveis x_1 e x_2 serão independentes se

$$p(x_1, x_2) = p(x_1)\, p(x_2). \tag{3.16}$$

claramente isso não é verdade neste caso. Portanto <u>as partículas são dependentes</u>

(c)

$$p(x_1, x_2) = p(x_1 | x_2)\, p(x_2)$$

$$\Rightarrow \quad p(x_1 | x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_2)}$$

Usando (3.1) e (3.15):

$$p(x_1 | x_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x_0} \left(\frac{x_2 - x_1}{x_0} \right)^2 \frac{x_0^2}{x_2^2 + x_0^2/2} \; e^{-x_1^2/x_0^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, x_0} \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2^2 + x_0^2/2} \; e^{-x_1^2/x_0^2}$$

5) Cumulantes da Poisson

Seja $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Então

$$\langle e^{isX} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} e^{isk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{is})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{is}}$$

$$\therefore \quad \langle e^{isX} \rangle = \exp\left[\lambda (e^{is} - 1)\right]$$

A função geradora de cumulantes será

$$c(s) = \ln \langle e^{isX} \rangle = \lambda (e^{is} - 1)$$

Para encontrar os cumulantes, eu expando $c(s)$ em uma série de potencias em s:

$$c(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(is)^m \kappa_m}{m!}$$

Como

$$e^{is} - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(is)^m}{m!}$$

obtemos

$$c(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(is)^m}{m!} \lambda$$

Portanto, concluímos que todos os cumulantes da Poisson tem o mesmo valor:

$$\underline{\kappa_m = \lambda} \qquad \text{para } m = 1, 2, 3, \ldots$$

2) Distribuição mista

$$p(E) = \begin{cases} 0.2\ \delta(E + E_0) & \text{se } E < 0 \\ 0.8\ \dfrac{e^{-E/b}}{b} & \text{se } E > 0 \end{cases}$$

$E_0 = 1.5\,eV$ e $b = 1\,eV$

(a) $$P(E > 1\,eV) = \int_1^{\infty} p(E)\,dE = \frac{0.8}{b}\int_1^{\infty} e^{-E/b}\,dE$$

$$= \frac{0.8}{b}\, b\, e^{-1/b}$$

usando $b = 1$ obtemos

$$P(E > 1\,eV) = \frac{0.8}{e} = 0.2943$$

(b) $$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, E\, p(E) = 0{,}2\,(-E_0) + 0{,}8\int_0^{\infty} dE\, E\, \frac{e^{-E/b}}{b}$$

Em aula vimos que se $x \sim Expo(\lambda)$ então $\langle x \rangle = 1/\lambda$

Portanto

$$\int_0^{\infty} dE\, \frac{E}{b}\, e^{-E/b} = b$$

$$\therefore \quad \langle E \rangle = -0{,}2\,E_0 + 0{,}8\,b = 0{,}5\,eV$$

(c) $P(E<e) = ?$

- Se $e < -E_0$ então $P(E<e) = 0$
- Se $-E_0 < e < 0$ então $P(E<e) = 0,2$
- Se $e > 0$ então

$$P(E<e) = 0,2 + 0.8\int_0^e dE\, P(E)$$

$$= 0,2 + \frac{0.8}{b}\int_0^e dE\, e^{-E/b}$$

$$= 0,2 + 0,8(1 - e^{-e/b})$$

$\therefore$