Mec. Stat - Lista 3 - Gabarito

1) Distribuição binormal

$$P_{x,y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \quad (1.1)$$

A prob condicional $P_{x|y}(x|y)$ é definida como

$$P_{x|y}(x|y) = \frac{P_{x,y}(x,y)}{P_y(y)} \quad (1.2)$$

Portanto precisamos primeiro encontrar $P_y(y)$:

$$P_y(y) = \int dx\, P_{x,y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}$$

Agora completamos quadrados.

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} = \left(\frac{x}{\sigma_x} - \frac{\rho y}{\sigma_y}\right)^2 - \left(\frac{\rho y}{\sigma_y}\right)^2$$

Com isso obtemos

$$P_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\frac{\rho^2 y^2}{\sigma_y^2}\right\} \cdot$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left(\frac{x}{\sigma_x} - \frac{\rho y}{\sigma_y}\right)^2\right\}$$

The exponential outside the integral simplifies to

$$-\frac{y^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\left[1-\rho^2\right] = -\frac{y^2}{2\sigma_y^2}$$

As for the integral, change variables to

$$z = \frac{x}{\sigma_x} - \frac{\rho y}{\sigma_y}$$

$$dz = \frac{dx}{\sigma_x}$$

Then we get

$$P_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-y^2/2\sigma_y^2}\, \sigma_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left\{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}\right\}}_{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}$$

Thus, we conclude that

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\, e^{-y^2/2\sigma_y^2} \qquad (1.3)$$

We see from this result that $Y \sim N(0, \sigma_y^2)$

Substituting (1.3) and (1.1) in (1.2) we get

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right] + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right\} \quad (1.4)$$

Let us simplify the exponent; it reads

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{ \frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - \frac{(1-\rho^2)y^2}{\sigma_y^2} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{ \frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{\rho^2 y^2}{\sigma_y^2} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{ \left(\frac{x}{\sigma_x} - \frac{\rho y}{\sigma_y}\right)^2 \right\}$$

$$= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\frac{1}{\sigma_x^2}\left(x - \frac{\rho\sigma_x y}{\sigma_y}\right)^2$$

Now let

$$\mu_x = \rho\frac{\sigma_x y}{\sigma_y} \quad (1.5)$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sigma_x\sqrt{1-\rho^2}$$

Eq (1.5) then becomes

$$\boxed{P_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_x^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu_x)^2}{2\tilde{\sigma}_x^2} \right\}} \quad (1.6)$$

thus we conclude that

$$\boxed{X|Y=y \sim N\left(\frac{\rho\sigma_x y}{\sigma_y}, \sigma_x^2(1-\rho^2)\right)} \quad (1.7)$$

We see that the correlation ρ reduces the variance of x.
When $\rho = \pm 1$, the variance tends to zero (in this case, if $Y=y$ is known, then you completely know what X will be).

When $\rho = 0$ the mean of $X|Y=y$ is zero. But if $\rho > 0$ the mean will have the same sign as y and if $\rho < 0$ the sign will be opposite. This agrees with our idea of correlation: when X, Y are positively correlated, $Y>0$ makes it more likely to have $X>0$ and when they are negatively correlated, $Y>0$ makes it more negative to have $X<0$.

Regra dos 5 segundos

(a) Como $N_t \sim Pois(\lambda) \Rightarrow \langle N_t \rangle = \lambda t$

$$\Rightarrow \quad \lambda t_c = N_c$$

$$t_c = \frac{N_c}{\lambda}$$

(b) $X_t = \dfrac{N_t}{N_c}$

Sabemos que quando t é grande $Pois(\lambda t)$ tende a uma normal, portanto

$$X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Temos: $\mu = \langle X_t \rangle = \dfrac{\langle N_t \rangle}{N_c} = \dfrac{\lambda t}{N_c}$

Mas $N_c = \lambda t_c \Rightarrow \mu = t/t_c$.

Da mesma forma, sabemos da Poisson que $Var(N_t) = \lambda t$. Portanto

$$\sigma^2 = Var(X_t) = \frac{1}{N_c^2} Var(N_t) = \frac{\lambda t}{N_c^2} = \frac{t/t_c}{N_c}$$

Assim:

$$\boxed{X_t \sim N\left(t/t_c, \frac{t}{t_c N_c}\right)}$$

(c) Violar a regra dos 5 segundos significa demorar mais que 5 segundos para que os micróbios devorem sua comida. Ou seja

$$P(N_{t_c} < N_c)$$

Para $N_t \sim Pois(\lambda t)$, temos

$$P(N_{t_c} < N_c) = e^{-\lambda t_c} \sum_{m=0}^{N_c} \frac{(\lambda t_c)^m}{m!}$$

Para X_t temos

$$P(X_{t_c} < 1) = \int_{-\infty}^{1} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{\sigma_c^2}\right\}$$

onde $\sigma_c = 1/N_c$

Quando $N_c \to \infty$ a dist. tende para um δ de Dirac e, consequentemente, a probabilidade de obter uma violação vai a zero.

2) Cadeia de Markov

(a)

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Essa cadeia não é irredutível pois começando em (1,2), nunca podemos alcançar (3,4) e vice versa.

(b) A distribuição estacionária $\vec{p}^*$:

$$Q\vec{p}^* = \vec{p}^* \qquad (2.2)$$

Como a cadeia se fatora em duas cadeias independentes, teremos duas dist. estacionárias independentes, que não comunicam as duas partes. Ou seja, elas serão do tipo

$$\vec{p}_1^* = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{p}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Aplicando a Eq (2.2) para $\vec{p}_1^*$ obtemos

$$Q\vec{p}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \\ \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{p}_1^*$$

Portanto

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{4} = a \rightsquigarrow b = 2a$$

Assim $\vec{P}_1^{\,*}$ será

$$\vec{P}_1^{\,*} = a\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$$

A constante a é determinada da normalização

$$a + 2a = 1 \;\rightsquigarrow\; a = 1/3$$

Portanto, a 1ª distribuição estacionária será

$$\boxed{\vec{P}_1^{\,*} = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\0\\0\end{bmatrix}} \qquad (2.4)$$

A outra distribuição é obtida de maneira semelhante:

$$Q\,\vec{P}_2^{\,*} = \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{c}{4}+\frac{3d}{4}\\\frac{3c}{4}+\frac{d}{4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\c\\d\end{bmatrix} = \vec{P}_2^{\,*}$$

Portanto

$$\frac{c}{4}+\frac{3d}{4} = c \;\rightsquigarrow\; c = d$$

Assim

$$\boxed{\vec{P}_2^{\,*} = \begin{bmatrix}0\\0\\1/2\\1/2\end{bmatrix}} \qquad (2.5)$$

(c) Se o sistema começa em $\vec{p}(0) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$, então ele tem 50% de chance de começar em (1, 2) e 50% de chance dele começar em (3, 4). Se ele começa em 1 ou 2, ele sempre tenderá para $\vec{p}_1'$ e se ele começar em 3 ou 4, sempre tenderá para $\vec{p}_2'$. Portanto, para essa condição inicial o sistema tenderá para

$$\vec{p}(t \to \infty) = \frac{1}{2}\vec{p}_1' + \frac{1}{2}\vec{p}_2' = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 2/6 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

3) Um rei ~~•~~ se movendo em em tabuleiro de xadrez

Este problema se enquadra no problema do passeio aleatório em um grafo não direcionado. Para este problema sabemos que a distribuição estacionária será

$$p_n^* = \frac{d_n}{\sum_n d_n}$$

onde d_n é a conectividade de cada sítio.

Temos 3 categorias de sítio no total

Quina: 4 sítios, $d = 3$

Lados : $4 \times 6 = 24$ sítios, $d = 5$

Meio : $64 - 28 = 36$ sítios, $d = 8$

Portanto

$$\sum_n d_n = 36 \times 8 + 24 \times 5 + 4 \times 3 = 384$$

e

$$p^*(\text{quina}) = \frac{3}{420}$$

$$p^*(\text{lado}) = \frac{5}{420}$$

$$p^*(\text{meio}) = \frac{8}{420}$$