Gabarito - Lista 5

1) $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} \, e^{-\lambda \cosh x} \, dx$

Queremos aplicar o método de Laplace

$$\int_a^b e^{N f(x)} dx \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{N |f''(x_0)|}} \; e^{N f(x_0)}$$

onde x_0 é o máximo de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Podemos escrever nossa integral como

$$I = \int dx \; e^{-\lambda f(x)} dx$$

$$f(x) = \cosh x - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

Queremos neste caso o mínimo de $f(x)$ (por causa do sinal de menos: o mín. de $f(x)$ é o max de $-f(x)$).

O 2º termo em $f(x)$ é irrelevante: $\lambda >> 1$.

$\cosh x$ é mínimo em $x_0 = 0$.

$$f(x_0) = 1$$

$$f''(x_0) = 1 + 1/3\lambda \simeq 1.$$

$$\therefore \quad \boxed{I \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \; e^{-\lambda}}$$

2) $E_n = \dfrac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$. Queremos $Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n}$

Não precisamos saber o significado físico das constantes para resolver esse problema.

Não é possível calcular a soma exatamente e portanto precisamos convertê-la em uma integral.

Seja

$$k_n = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

Então $\Delta k_n = \dfrac{\pi\hbar}{a}\Delta n$ e $\Delta n = 1$. Introduzindo o "1" conveniente temos

$$Z = \frac{a}{\pi\hbar}\sum_n \Delta k_n \, e^{-\beta k_n^2/2m}$$

Isso será uma boa aproximação para uma soma de Riemann quando Δk_n for pequeno. Mas temos que pensar "pequeno com relação a oque? Bom, devemos ter

$$\sqrt{\frac{\beta}{2m}}\,\Delta k_n \ll 1$$

ou seja

$$\sqrt{\frac{\beta}{2m}}\,\frac{\pi\hbar}{a} \ll 1$$

Essa é a condição para a aprox. de uma soma em uma integral ser razoável.

com isso obtemos

$$z = \frac{a}{\pi\hbar} \int_0^\infty dk\, e^{-\beta k^2/2m}$$ (Note limits from 0 to ∞)

$$= \frac{a}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}$$

$$z = \frac{a}{(2\pi\hbar)} \sqrt{2\pi m k_B T}$$

This is the same result we obtained in class using periodic boundary conditions.