Gabarito - Lista 5

1) $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x} \, e^{-\lambda \cosh x} \, dx$

Queremos aplicar o método de Laplace:

$$\int_a^b e^{Nf(x)} dx \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{N|f''(x_0)|}} \, e^{Nf(x_0)}$$

onde x_0 é o máximo de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$.

Podemos escrever nossa integral como

$$I = \int dx \, e^{-\lambda f(x)} dx$$

$$f(x) = \cosh x - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

Queremos neste caso o mínimo de $f(x)$ (por causa do sinal de menos: o min. de $f(x)$ é o max de $-f(x)$).

O 2º termo em $f(x)$ é irrelevante: $\lambda >> 1$.

$\cosh x$ é mínimo em $x_0 = 0$.

$$f(x_0) = 1$$

$$f''(x_0) = 1 + 1/3\lambda \simeq 1.$$

$$\therefore \quad \boxed{I \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \, e^{-\lambda}}$$

2) $E_n = \dfrac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$. Queremos $Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n}$

Não precisamos saber o significado físico das constantes para resolver esse problema.

Não é possível calcular a soma exatamente e portanto precisamos convertê-la em uma integral.

Seja

$$k_n = \frac{n \pi \hbar}{a}$$

Então $\Delta k_n = \frac{\pi \hbar}{a} \Delta n$ e $\Delta n = 1$. Introduzindo o "1" conveniente temos

$$Z = \frac{a}{\pi \hbar} \sum_n \Delta k_n \, e^{-\beta k_n^2/2m}$$

Isso será uma boa aproximação para uma soma de Riemann quando Δk_n for pequeno. Mas temos que pensar "pequeno com relação a oque? Bom, devemos ter

$$\sqrt{\frac{\beta}{2m}} \Delta k_n \ll 1$$

ou seja

$$\sqrt{\frac{\beta}{2m}} \frac{\pi \hbar}{a} \ll 1$$

Essa é a condição para a aprox. de uma soma em uma integral ser razoável.

com isso obtemos

$$Z = \frac{a}{\pi \hbar} \int_0^{\infty} dk \; e^{-\beta k^2/2m}$$ (Note limits from 0 to ∞)

$$= \frac{a}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}$$

$$Z = \frac{a}{(2\pi\hbar)} \sqrt{2\pi m k_B T}$$

This is the same result we obtained in class using periodic boundary conditions.

3) $\epsilon_{\mathbf{k}} = c\hbar|\mathbf{k}|$ $k_i = \frac{2\pi m_i}{L}$, $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Densidade de estados : $\boxed{\sum_{\mathbf{k}} f(\epsilon_{\mathbf{k}}) = \int d\epsilon\, D(\epsilon)\, f(\epsilon)}$

o "1" conveniente: $\frac{L^2}{(2\pi)^2} \Delta k_x \Delta k_y = 1$

$A = L^2$

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\epsilon_{\mathbf{k}}) = \frac{A}{(2\pi)^2} \sum_{\mathbf{k}} \Delta k_x \Delta k_y\, f(\epsilon_{\mathbf{k}})$$

$$= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k}\, f(\epsilon_{\mathbf{k}})$$

coordenadas polares: $d^2\mathbf{k} = k\,dk\,d\phi$. Note ϵ_k depende apenas de k:

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\epsilon_{\mathbf{k}}) = \frac{A}{(2\pi)^2} 2\pi \int dk\, k\, f(\epsilon_k)$$

Mudança de variáveis: $\epsilon = c\hbar k$

$$k\,dk = \frac{1}{(c\hbar)^2} \epsilon\, d\epsilon$$

$$\therefore \sum_{k} f(\epsilon_k) = \frac{A}{2\pi} \frac{1}{(c\hbar)^2} \int d\epsilon\, \epsilon\, f(\epsilon)$$

Densidade de Estados : $\boxed{D(\epsilon) = \frac{A}{2\pi (c\hbar)^2} \epsilon}$

(ε

4) Expansão adiabática ou entropia constante

Na aula vimos que $F = -\frac{4\sigma}{3c} V T^4$

$$\therefore \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{16\sigma}{3c} V T^3$$

Assim, vemos que as curvas à entropia constante são curvas onde $VT^3 = \text{const.}$

$$\therefore \quad \frac{V(3K)}{V(3000K)} = \left(\frac{3000}{3}\right)^3 = 10^9$$

—//

5) Vimos em aula que $U = \frac{4\sigma}{c} V T^4$. Portanto

1) $$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{16\sigma}{c} V T^3$$

Com isso obtemos

$$C = \frac{16 \times (5{,}670 \times 10^{-8})}{3 \times 10^8} (1)(300)^3$$

$$= 8{,}164 \times 10^{-8} \ J/K$$

2) Gas monoatômico: $C = \frac{3}{2} N k_B$.

Portanto devemos ter

$$N = \frac{2}{3} \frac{C}{k_B} = 3.9 \times 10^{15} \text{ átomos.}$$

6) A fórmula p/ a pressão de radiação foi vista em aula e vale

$$P_{rad} = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{4\sigma}{3c} T^4$$

Essa pressão deve ser comparada com a pressão do gás, que vale

$$P_{gas} = \frac{N k_B T}{V}$$

Com isso obtemos

$$T^3 = \frac{N k_B}{V} \frac{3c}{4\sigma}$$

$$T = \left(\frac{N}{V} k_B \frac{3c}{4\sigma} \right)^{1/3} = 1,1 \times 10^6 \text{ K}$$

—//