Mecânica Clássica 1 - Lista de natal - Ho Ho Ho

Professor: Gabriel T. Landi

O campo vetorial

1) Aquecimento: quadri-potencial e os campos elétrico e magnético

O objeto fundamental do eletromagnetismo é o quadri-potencial $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$, sendo ϕ o campo escalar e $\boldsymbol{A}$ o campo vetorial. Os campos elétrico $\boldsymbol{E}$ e magnético $\boldsymbol{B}$ podem ser obtidos do campo vetorial a partir das relações:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1}$$

(a) Mostre que as definições de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ não mudam por uma transformação de calibre ("Gauge"):

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Gamma$$

sendo Γ um campo escalar qualquer. Isso significa que A^μ e A'^μ são fisicamente equivalentes e reflete o fato de que na verdade são os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ que podem ser medidos experimentalmente.

(b) O quadri-potencial A^μ é um quadri-vetor; ou seja, ele se transforma por uma transformação de Lorentz assim como o vetor posição x^μ. Use este fato para obter as regras de transformação dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$.

2) Lagrangiana do campo eletromagnético

Considere a seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2}$$

Note que $F^{\mu\nu}$ é anti-simétrico: $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Você terá que usar este resultado diversas vezes.

(a) Mostre que as equações do movimento são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

(b) Escreva essas equações em termos dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ e mostre que elas reproduzem duas das quatro equações de Maxwell.

(c) Mostre que as outras duas equações podem ser obtidas da identidade:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

onde μ, ν e λ são índices diferentes. A validade dessa igualdade decorre da própria definição de $F_{\mu\nu}$.

(d) Verifique que a Lagrangiana (2) é invariante por uma transformação de calibre.

3) Teorema de Nöether e correntes conservadas

Considere uma translação no espaço-tempo:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = A^\mu(x)$$

(a) Mostre que a grandeza conservada referente à essa simetria é o tensor de energia-momento:

$$T^\mu{}_\nu = -F^\mu{}_\sigma \partial_\nu A^\sigma - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}$$

(b) A componente T^{00} é a densidade de energia e sua integral por todo o espaço é a energia do campo. Mostre que

$$\mathcal{E} = \int \mathrm{d}^3x T^{00} = \int \mathrm{d}^3x \left\{ \frac{1}{2}(F_{0i})^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 \right\}$$

Expresse também este resultado em termos dos campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$.

(c) O campo conjugado a A^μ é, por definição,

$$B^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)}$$

Mostre que

$$B^\mu = -F^{0\mu}$$

Em particular, note que $B^0 = 0$. Em termos do campo A e de seu conjugado B a energia E do item anterior pode ser escrita como o Hamiltoniano.

$$H = \int \mathrm{d}^3x \left\{ \frac{1}{2}B_i^2 + \frac{1}{4}(F_{ij})^2 \right\} \tag{3}$$

Como $B^0 = 0$, ele depende apenas de A^i e B^i.

(d) A componente T^{0i} é a densidade de momento: $p^i = T^{0i}$ é o momento total do campo é

$$P^i = \int \mathrm{d}^3x p^i$$

Mostre que

$$p^i = -B_j \partial^i A^j$$

(e) Considere agora a resposta do sistema a uma rotação de um ângulo infinitesimal $\delta\theta$ em torno do eixo z. As coordenadas se transformam como

$$\begin{aligned}
x^0 &\to x^0 \\
x^1 &\to x^1 - \delta\theta x^2 \\
x^2 &\to x^2 + \delta\theta x^1 \\
x^3 &\to x^3
\end{aligned}$$

O campo A^μ, por ser um campo vetorial, deve se transformar da mesma maneira:

$$\begin{aligned}
A^0 &\to A^0 \\
A^1 &\to A^1 - \delta\theta A^2 \\
A^2 &\to A^2 + \delta\theta A^1 \\
A^3 &\to A^3
\end{aligned}$$

Mostre que a carga conservada obtida do teorema de Nöether (ou seja, a componente 0) é

$$m^3 = (x^1p^2 - x^2p^1) + (A^1B^2 - A^2B^1)$$

onde p^i foi definido acima. Portanto, o momento angular do sistema é

$$\boldsymbol{M} = \int \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})$$

Podemos reconhecer assim, a componente do momento angular orbital $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ e a componente de spin

$$\boldsymbol{S} = \int \mathrm{d}^3x \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{4}$$

4) Quantização do campo vetorial

Agora vamos quantizar o campo eletromagnético. Devido à liberdade de calibre, trabalharemos no calibre de Coulomb, onde escolhemos

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0, \qquad \phi = 0$$

Com isso trabalharemos apenas com as componentes A^i do campo vetorial, e seus momentos conjugados B^i. A quantização canônica consiste em promover os campos A^i e B^i à operadores satisfazendo as relações de comutação

$$[A^i(\boldsymbol{x}), B^j(\boldsymbol{y})] = i\delta_{i,j}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{5}$$

O procedimento é mais facilmente realizado supondo que o campo se encontra em um cubo de volume $V = L^3$ com condições periódicas de contorno (no fim dos cálculos podemos tomar o limite $V \to \infty$). Neste caso expandimos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ em uma série de Fourier

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{n=1}^{3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \phi^n(\boldsymbol{k}) \hat{\boldsymbol{e}}_n(\boldsymbol{k}) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{n=1}^{3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \pi^n(\boldsymbol{k}) \hat{\boldsymbol{e}}_n(\boldsymbol{k}) \tag{7}$$

Nesta equação $\hat{\boldsymbol{e}}_n(\boldsymbol{k})$ são versores arbitrários em $\mathbb{R}^3$. O que estamos fazendo é converter de 3 campos $A^i(\boldsymbol{x})$ em três campos $\phi^n(\boldsymbol{k})$ no espaço de Fourier (o índice i é usado no espaço real e o índice n no espaço de Fourier). É conveniente parametrizar os versores como

$$\hat{\boldsymbol{e}}_3(\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_1 \perp \hat{\boldsymbol{e}}_2 \perp \hat{\boldsymbol{e}}_3$$

Finalmente, como quantizamos os campos em uma caixa, os vetores $\boldsymbol{k}$ são discretos e tomam os valores

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(a) Mostre que o fato dos campos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ serem reais implica nas relações:

$$\left(\phi^n(\boldsymbol{k})\hat{\boldsymbol{e}}_n(\boldsymbol{k})\right)^* = \phi^n(-\boldsymbol{k})\hat{\boldsymbol{e}}_n(-\boldsymbol{k}) \tag{8}$$

$$\left(\pi^n(\boldsymbol{k})\hat{\boldsymbol{e}}_n(\boldsymbol{k})\right)^* = \pi^n(-\boldsymbol{k})\hat{\boldsymbol{e}}_n(-\boldsymbol{k}) \tag{9}$$

(b) Mostre que as relações de comutação (5) implicam que os operadores ϕ^n e π^n devem satisfazer

$$[\phi^n(\boldsymbol{k}), \pi^{n'}(\boldsymbol{k}')] = i\delta_{n,n'}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$

(c) Mostre que a imposição do calibre de Coulomb, $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ implica que $\phi^3 = \pi^3 = 0$. Ou seja, apesar de em princípio ser possível decompor $\boldsymbol{A}$ em três direções independentes, bastam duas delas. Isso está relacionado com o fato do campo eletromagnético não possuir um termo de massa. Se tivéssemos incluído um termo de massa na Lagrangiana, isso não ocorreria.

(d) Mostre que o Hamiltoniano (3) pode ser escrito como

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}, n\in\{1,2\}} \left\{ \pi^n(\boldsymbol{k})\pi^{n*}(\boldsymbol{k}) + k^2 \phi^n(\boldsymbol{k})\phi^{n*}(\boldsymbol{k}) \right\} \tag{10}$$

onde $k = |\boldsymbol{k}|$.

5) Operadores de criação e aniquilação

Continuando do exercício anterior, defina agora os operadores

$$\phi^n(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2k}}\Big(a_n(\boldsymbol{k}) + a_n^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big) \tag{11}$$

$$\pi^n(\boldsymbol{k}) = i\sqrt{\frac{k}{2}}\Big(a_n(\boldsymbol{k}) - a_n^\dagger(-\boldsymbol{k})\Big) \tag{12}$$

(a) Mostre que esses operadores satisfazem as relações de comutação de Bosons:

$$[a_n(\boldsymbol{k}), a_{n'}^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta_{n,n'}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$

e $[a_n(\boldsymbol{k}), a_{n'}(\boldsymbol{k}')] = 0$.

(b) Mostre que o Hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},n\in\{1,2\}} |\boldsymbol{k}|\Big(a_n^\dagger(\boldsymbol{k})a_n(\boldsymbol{k}) + 1/2\Big)$$

Além disso, mostre que o momento do campo pode ser escrito como

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{k},n\in\{1,2\}} \boldsymbol{k}a_n^\dagger(\boldsymbol{k})a_n(\boldsymbol{k})$$

Nós temos, portanto, a seguinte interpretação física: a quantização do campo eletromagnético produz partículas cuja relação entre energia e momento é dada por $\epsilon(\boldsymbol{k}) = |\boldsymbol{k}|$. Comparando isso com a relação de dispersão relativística usual, $\epsilon(\boldsymbol{k}) = \sqrt{m^2 + |\boldsymbol{k}|^2}$, vemos que as partículas em questão não possuem massa. Essas partículas que decorrem da quantização do campo eletromagnético são os fótons.

6) O spin do campo eletromagnético

Considere novamente o spin do campo eletromagnético, descrito pela Eq. (4).

(a) Usando as relações de comutação (5), mostre que

$$[S^i, S^j] = i\epsilon^{ijk}S^k$$

(b) Mostre que

$$[S^i, A^j] = i\epsilon^{ijk}A^k$$

(c) Mostre que

$$[S^i, a_n^\dagger(\boldsymbol{k})] = i\epsilon^{inm}a_m^\dagger(\boldsymbol{k})$$

(d) O estado do vácuo, $|0\rangle$, é o estado que não possui nenhuma partícula. Ele é definido como $a_n(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$. Ou seja, o operador de aniquilação, que em geral tentaria aniquilar uma partícula, aniquila o vácuo. Mostre que

$$S^i|0\rangle = 0$$

(e) Considere agora o operador $\mathcal{S}^2 := S^iS^i = (S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2$. Mostre que

$$\mathcal{S}^2 a_n^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle = 2a_n^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle$$

Ou seja, o estado que possui uma única partícula, $a_n^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle$, é um auto-estado do operador $\mathcal{S}^2$ com autovalor 2. Da mecânica quântica, sabemos que os autovalores do operador $\mathcal{S}^2$ são $s(s+1)$, onde s é o spin do sistema. Concluímos, portanto, que o campo vetorial é um campo de spin 1.

(f) Mostre que

$$S^3\left(a_1^\dagger + ia_2^\dagger\right)|0\rangle = \left(a_1^\dagger + ia_2^\dagger\right)|0\rangle \tag{13}$$

$$S^3\left(a_1^\dagger - ia_2^\dagger\right)|0\rangle = -\left(a_1^\dagger - ia_2^\dagger\right)|0\rangle \tag{14}$$

Isso mostra que apesar de possuir spin 1, o campo vetorial sem massa (ou seja, o campo eletromagnético), não possui a componente 0 de spin (apenas as componentes $+1$ e -1). Isso é uma consequência da simetria de calibre, que faz com que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ seja decomposto em apenas duas direções, e não três.