Mecânica Estatística - Lista 1

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 17/03/2017

1) (1,5 pontos) Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é definida como

$$X \sim \text{Pois}(\lambda): \qquad P_k = \text{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

(a) Calcule $\langle a^X \rangle$, onde a é uma constante arbitrária.

(b) Seja $Y = X + c$, onde c é uma constante. Encontre $\langle Y \rangle$ e $\text{Var}(Y)$ sem fazer nenhum cálculo, usando apenas as propriedades da média e da variância que vimos em sala.

2) (1,5 pontos) Quantização do momento angular (MIT OCW)

O momento angular S_z de uma partícula de spin 1 pode tomar somente os valores $-\hbar$, 0 e $\hbar$. Sabe-se que, em um dado estado quântico,

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{3}, \qquad \langle S_z^2 \rangle = \frac{2\hbar^2}{3}$$

Encontre a distribuição de probabilidade $P(S_z)$. Para resolver este problema, você não precisa ter nenhum conhecimento de mecânica quântica.

3) (2 pontos) Paradigma de Poisson

Lembre-se da interpretação discutida em aula, de que a distribuição de Poisson surge de maneira aproximada quando há muitos eventos, mas cada um possui uma probabilidade pequena de sucesso. Aplique esta idéia para os seguintes problemas:

(a) A probabilidade de um brasileiro (população = 200 milhões) visitar o site `www.euamomecanicaestatistica.com.br` em um certo dia é $p = 10^{-9}$. Estime a probabilidade de que pelo menos duas pessoas visitem o site em um único dia.

(b) Um relatório de iniciação científica de um estudante possui 100 páginas e, no total, foram encontrados 100 erros de digitação espalhados de maneira aleatória pelo texto. Qual a probabilidade que a primeira página não tenha nenhum erro de digitação (Assuma que o texto está distribuído uniformemente por todas as páginas)?

(c) Um monitor de LCD possui 1920×1080 pixels. No controle de qualidade, um monitor é dado como aceitável se ele possui menos de 15 pixels defeituosos. A probabilidade de um pixel ser defeituoso é 5×10^{-6}. Qual a porcentagem dos monitores que passa pelo controle de qualidade?

4) (2,5 pontos) Distribuição geométrica

Uma distribuição importante, tanto em física quanto em matemática, é a distribuição geométrica:

$$X \sim \text{Geom}(p): \qquad P_k = p(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Ela é interpretada como o *número de fracassos antes do primeiro sucesso.* Ou seja, X representa o número de falhas. Por exemplo, $X = 3$ significa que você jogou uma moeda 4 vezes, obtendo 0 nas três primeiras e finalmente 1 na quarta.

(a) Mostre que a Eq. (2) está corretamente normalizada.

(b) Calcule $\langle X \rangle$.

(c) A probabilidade de um estudante passar no curso de mecânica estatística é $p = 0.3$ (talvez eu esteja sendo um pouco dramático). Em média, quantas vezes ele vai reprovar antes de passar?

(d) O seu resultado no item anterior não será um número inteiro. Quero que pense sobre o que isso significa. Para tal, calcule qual o número mais provável de vezes que ele irá cursar a disciplina.

5) (2,5 pontos) Radiação de corpo negro

No problema de radiação de corpo negro, aprendemos que o campo eletromagnético dentro de uma cavidade (vulgo, forno de pizza) pode ser decomposto em um número infinito de modos normais, cada um caracterizado pelo vetor de onda $\boldsymbol{k}$ e o vetor de polarização $\boldsymbol{\epsilon}$. A energia de cada modo é quantizada como $E_n = \hbar\omega n$ onde n é o número de fótons naquele modo e $\omega = c|\boldsymbol{k}|$ é a frequência do modo. Aprenderemos mais adiante no curso que se a cavidade está a uma temperatura T, a probabilidade de encontrar n fótons num certo modo é

$$p_n = \frac{e^{-\hbar\omega n/k_B T}}{Z} \tag{3}$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e Z é uma constante de normalização conhecida como *função de partição.* Cada modo normal terá uma probabilidade semelhante.

(a) Encontre Z.

(b) Esboce um gráfico da probabilidade de não encontrar nenhum fóton naquele modo em função da temperatura. Use como unidades convenientes $k_B T/\hbar\omega$.

(c) Mostre que o número médio de fótons no modo normal é dado por

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \tag{4}$$

Este resultado é conhecido como distribuição de Bose-Einstein. Dica: relacione p_n com a distribuição geométrica (2) e use o resultado do problema 3(b).