Física 1 - 2020-1 - Noturno

Lista 1

Professores: Valentina Martelli e Gabriel Landi

Data de entrega: 18/03 (quarta-feira)

Para a resolução da lista, deixe bem claro o ponto de partida; diga explicitamente como você interpretou do enunciado e/ou faça diagramas. Especifique sua escolha de referencial. Na hora de escrever a resposta, não se esqueça das unidades. E use algarismos significativos. Incentivamos que você discuta os problemas com seus colegas. Mas lembre-se: a redação final é *individual*. A entrega das listas (impressas) é realizada diretamente ao Professor/Professora responsável da sua turma.

1. **(0,5 pontos) Raio do horizonte de evento:** Quando um objeto de massa M é suficientemente comprimido numa certa região do espaço, ele se torna um buraco negro se seu raio se tornar menor que o *raio de Schwarzschild* R_s. Nesse caso, R_s determina o horizonte de eventos do qual nem mesmo a luz é capaz de escapar (é por isso que o buraco negro é negro). O raio de Schwarzschild pode depender apenas da massa M do objeto, da constante gravitacional G e da velocidade da luz c. Usando apenas análise dimensional, encontre uma relação para o raio de Schwarzschild R_s em função dessas três grandezas. Se você der uma busca por "raio de Schwarzschild", você verá que essa análise está quase correta. Comparada com a análise da teoria da relatividade, ela erra apenas por um fator 2.

   Solução: Como vimos em aula, para resolver este tipo de problema basta supor que
   $$R_s = M^\alpha G^\beta c^\gamma,$$
   onde α, β, γ são parâmetros que devem ser fixados para garantir que o lado esquerdo e direito da equação tenham as mesmas unidades. Usando
   $$[M] = kg \qquad [G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}, \qquad [c] = \frac{m}{s},$$
   obtemos
   $$m = (kg)^\alpha \left(\frac{m^3}{kgs^2}\right)^\beta \left(\frac{m}{s}\right)^\gamma = \frac{(m)^{3\beta+\gamma}(kg)^{\alpha-\beta}}{(s)^{\gamma+2\beta}}.$$
   Para eliminar kg e s, colocamos $\gamma = -2\beta$ e $\alpha = \beta$. Com isso o lado direito se reduz a m^β. Portanto, temos que escolher $\beta = 1$. Assim, concluímos que o raio de Schwarzschild deve ser
   $$R_s = \frac{MG}{c^2}.$$
   Isso está muito próximo da resposta correta, derivada usando a teoria da relatividade Geral, que é
   $$R_s = \frac{2MG}{c^2}.$$

2. **(1 ponto) Estrutura hiperfina do átomo de hidrogênio:** Uma das bases para a radioastronomia é a chamada estrutura hiperfina do átomo de hidrogênio, que consiste na existência de dois níveis de energia muito próximos entre si, cuja separação é dada por
   $$\Delta E = \frac{4 g_p \hbar^4}{3 m_p m_e^2 c^2 a^4}, \tag{1}$$

onde $g_p = 5,59$ é o chamado de fator giromagnético do próton, $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck, m_p e m_e são as massas do próton e do elétron, c é a velocidade da luz e a é o raio de Bohr. Você não precisa saber exatamente o que significam essas constantes (mas isso não te impede de fazer uma busca e descobrir mais sobre elas!). O objetivo deste exercício é te treinar a lidar com expressões envolvendo muitos parâmetros e muitas unidades.

(a) Faça análise dimensional e verifique que as dimensões da Eq. (1) estão de fato corretas.

(b) Calcule ΔE em Joules (cabe a você buscar os valores de todas as constantes; preste atenção que existem duas constantes de Planck, h e $\hbar = h/2\pi$).

(c) Calcule ΔE em elétron-Volts.

(d) Calcule a frequência de transição $\nu = \Delta E/h$ e o comprimento de onda $\lambda = c/\nu$. Mostre que $\lambda \simeq 21$ cm.

Por essa razão, essa linha de emissão é conhecida como "linha de 21cm do hidrogênio". O motivo pelo qual ela é importante é por que o valor de λ é conhecido com uma precisão incrível. Assim, ela funciona como uma *assinatura* do átomo de hidrogênio: se ajustamos um telescópio para detectar somente nessa frequência, então pontos brilhantes representam regiões ricas em hidrogênio. Essa é uma das maneiras que se usa para determinar a posição de estrelas e galáxias.

Solução: **(a)** As constantes envolvidas no problema são

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

$$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg},$$

$$m_p = 1,672 \times 10^{-27} \text{ kg},$$

$$c = 2,997 \times 10^{8} \text{ m/s},$$

$$a = 5,291 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

onde Joule é definido como $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$. Em termos de análise dimensional, o lado direito da Eq. (1) será, portanto,

$$\left(\frac{kg \cdot m^2}{s}\right)^4 (kg)^{-1}(kg)^{-2}\left(\frac{m}{s}\right)^{-2}(m)^{-4}. = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = J,$$

o que, de fato, tem dimensão de energia.

(b) Usando os valores das constantes listadas acima, obtemos

$$\Delta E = 9,419 \times 10^{-25} \text{ J}.$$

(c) A relação entre eV e J é:

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}, \qquad \text{ou} \qquad 1 \text{ J} = 6,242 \times 10^{18} \text{ eV}.$$

Utilizando isso no resultado do item (b) obtemos

$$\Delta E = 5,879 \times 10^{-6} \text{ eV}.$$

(d) A frequência é escrita em termos da "outra" constante de Planck

$$h = 2\pi\hbar = 6,622 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

Com isso obtemos

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = 1,422 \text{ GHz}.$$

Isso corresponde a um comprimento de onda

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 21,071 \text{ cm},$$

que é o famoso "21 cm".

3. **(1 ponto) Profundidade de um poço:** Para estimar a profundidade de um poço você solta uma pedra e mede quanto tempo até ouvir o barulho da queda. Suponha que o tempo seja $\Delta t = 2$ s.

   (a) Qual a melhor estimativa que podemos fazer para a altura do poço se desprezamos o tempo que o som demora para chegar até o seu ouvido? (Use $g = 10$ m/s^2).

   (b) Suponha agora que a velocidade do som é finita (tome $v_s = 330$ m/s). Obtenha uma expressão geral relacionando a altura do poço com o tempo Δt. Em seguida aplique essa expressão para o caso $\Delta t = 2$ s e compare com o item anterior.

Solução: (a) Supondo que o atrito é desprezível, a altura h do poço estará relacionada com o tempo de queda Δt de acordo com

$$h = \frac{g\Delta t^2}{2}$$

Para $\Delta t = 2$ s obtemos

$$h = 20 \text{ m}.$$

(b) Quando a velocidade do som não é desprezível, o tempo total entre largar a pedra e escutar o eco será dividido em duas partes. O primeiro intervalo t_1 se refere à queda e será dado por

$$h = \frac{g t_1^2}{2} \longrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Em seguida, temos o eco. Como o som se propaga com velocidade constante, obtemos

$$h = v_s t_2 \longrightarrow t_2 = \frac{h}{v_s}.$$

O tempo total será dado, portanto, por

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}.$$

O que nós queremos, na verdade, o contrário: queremos h em função de Δt. Podemos inverter essa relação definindo $z = \sqrt{h}$. Isso leva a uma equação quadrática em z:

$$z^2 + v_s\sqrt{\frac{2}{g}}z - v_s\Delta t = 0.$$

Escolhemos a solução positiva (pois $z > 0$), temos

$$z = -\frac{v_s}{\sqrt{2g}} + \sqrt{\frac{v_s^2}{2g} + v_s\Delta t}.$$

Voltando finalmente para $h = z^2$, obtemos

$$h = \left(-\frac{v_s}{\sqrt{2g}} + \sqrt{\frac{v_s^2}{2g} + v_s\Delta t}\right)^2.$$

Para o caso de $\Delta t = 2$ s, obtemos

$$h = 18,87 \text{ m}.$$

Comparando com o item (a), vemos que quando supomos que v_s é infinita, estamos superestimando a altura do poço.

4. **(1 ponto) Um maquinista irresponsável:** Um maquinista de um trem de passageiros, que se move com velocidade v_1, avista a sua frente, à uma distância d, um trem de carga que viaja nos mesmos trilhos e no mesmo sentido, mas com velocidade menor v_2. Para evitar uma colisão ele freia o seu trem, aplicando-lhe uma desaceleração a. Mostre que não haverá colisão se $a > (v_2 - v_1)^2/(2d)$.

Solução: Se tomamos um referencial no ponto onde o maquinista vê o outro trem pela primeira vez e começa a frear. A partir deste ponto, a posição da dianteira do primeiro trem será dada por

$$x_1(t) = v_1 t - \frac{at^2}{2}.$$

O 2o trem, por outro lado, se move com velocidade constante. A posição da traseira do 2o trem em função do tempo será, portanto, dada por

$$x_2(t) = d + v_2 t.$$

Queremos saber se os trens colidem ou não. Colidir significa que haverá algum tempo $t > 0$ tal que $x_1(t) = x_2(t)$. Se não houver nenhum t onde isso é verdade, então eles não irão colidir. Igualando as duas expressões, obtemos

$$v_1 t - \frac{at^2}{2} = d + v_2 t.$$

Resolvendo para t obtemos

$$t = -\frac{(v_2 - v_1)}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{(v_2 - v_1)^2 - 2ad}.$$

Nós não queremos que os trens colidam. Por isso não queremos que hajam soluções reias. Para que isso aconteça, devemos então ter

$$(v_2 - v_1)^2 - 2ad < 0,$$

ou

$$a > \frac{(v_2 - v_1)^2}{2d}.$$

Se a desaceleração for maior que esse valor, não haverá colisão.

Alternativamente, podemos tomar um referencial movendo-se na traseira do 2o trem, com velocidade v_2. Neste o 1o trem estará se movendo inicialmente com velocidade $v_1 - v_2$. A colisão ocorrerá no instante t quando

$$(v_1 - v_2)t - \frac{at^2}{2} = d,$$

que é a mesma equação acima.

Uma forma mais direta de resolver o problema é usar a equação de Torricelli,

$$v_f^2 - v_i^2 = -2a(x_f - x_i),$$

onde o sinal de menos já vem do fato de que estamos tomando a aceleração como negativa. No referencial em movimento com o 2o trem, o 1o trem começa com $v_i = v_1 - v_2$. E queremos que quando $x_f - x_i = d$, ele esteja com velocidade final $v_f = 0$ (para que não haja colisão). Com isso obtemos

$$-(v_1 - v_2)^2 = -2ad,$$

que já fornece a resposta desejada.

5. **(0,5 pontos) Medindo a aceleração da gravidade I:** Terrabolistas espaciais pousam em um planeta do nosso sistema solar. Para estimar a constante gravitacional, eles arremessam uma pedra verticalmente com velocidade inicial v_0 e observam que ela demora um tempo Δt para retornar ao solo. Supondo que não haja atrito, qual a expressão relacionando g com v_0 e Δt?

Solução Tomando um sistema de coordenadas tendo o solo como origem, a equação que descreve o movimento da pedra será

$$x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Estamos interessados no instante Δt onde ela retorna ao solo; ou seja, tal que $x(\Delta t) = 0$. Impondo essa condição, obtemos

$$g = \frac{2v_0}{\Delta t}.$$

6. **(1 ponto) Medindo a aceleração da gravidade II:** O método desenvolvido no problema anterior tem a desvantagem de que você precisa saber a velocidade inicial v_0, o que na prática nem sempre é viável. Um método alternativo consiste em lançar uma pedra para cima e medir os dois instantes de tempo t_1 e t_2 (quando ela está subindo e depois descendo) pelos quais a pedra passa por uma certa altura z. Mostre que

$$g = \frac{2z}{t_1 t_2}. \tag{2}$$

Solução Assim como no problema anterior, temos

$$x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Mas agora estamos interessados nos dois instantes de tempo t_1 e t_2 pelos quais a pedra passa por uma certa altura z. Isso leva a uma equação do segundo grau,

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad \text{ou} \qquad t^2 - \frac{2v_0}{g} t + \frac{2z}{g} = 0.$$

Lembre-se que sempre podemos fatorar uma equação quadrática na forma

$$0 = (t - t_1)(t - t_2) = t^2 - (t_1 + t_2)t + t_1 t_2.$$

Comparando com a equação acima, vemos que

$$t_1 t_2 = \frac{2z}{g},$$

e, portanto,

$$g = \frac{2z}{t_1 t_2}.$$

Com esse método podemos estimar g sem saber a velocidade inicial, usando apenas um cronômetro (e sabendo a altura z).

7. **(1,5 pontos) Elevador precisando de manutenção:** Um elevador sobe com aceleração constante a. No momento que sua velocidade atinge v_0, um parafuso se solta do teto do elevador. Calcule o tempo que demora para o parafuso atingir o chão do elevador, supondo que o chão e o teto estão separados de uma altura h.

Solução: A posição do chão, a partir do instante em que o parafuso se solta, é

$$x_c(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Já a posição do parafuso, a partir do mesmo instante, será

$$x_p(t) = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Estamos interessados em saber qual o tempo t^* onde ambas vão coincidir:

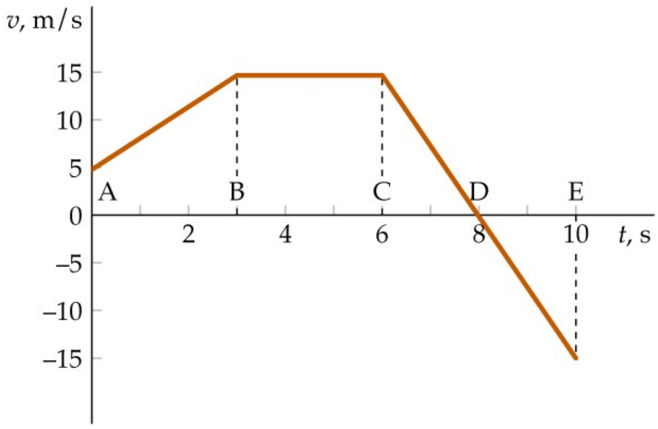
$$v_0 t^* + \frac{at^{*2}}{2} = h + v_0 t^* - \frac{gt^{*2}}{2}.$$

Resolvendo para t^*, obtemos

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{a+g}}.$$

Esse resultado faz sentido: ele aumenta com h e diminui com a aceleração do elevador (a) e da gravidade (g). Se $a \to 0$ ainda obtemos algo finito graças a g. Se tanto $a \to 0$ e $g \to 0$, o tempo tende a infinito (pois nesse caso o parafuso e o elevador continuam se movendo com velocidade constante).

8. **(1,5 pontos) Posição, velocidade e aceleração:** A velocidade em função do tempo para uma partícula movendo-se em uma dimensão está ilustrada na Fig. abaixo.



(a) Qual a aceleração média nos intervalos AB, BC e CE?

(b) Quão longe está a partícula da sua distância inicial após 10 s?

(c) Qual a distância total percorrida após 10 s?

(d) Esboce a posição da partícula em função do tempo.

Solução: (a) A aceleração é a derivada da velocidade,

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Como a velocidade varia linearmente em cada intervalo, podemos calcular a derivada como $\Delta v/\Delta t$. Temos, portanto,

$$\begin{aligned}
a_{AB} &= \frac{15-5}{3-0} = \frac{10}{3} \text{ m/s},\\
a_{BC} &= 0,\\
a_{CE} &= \frac{-15-15}{10-6} = -\frac{30}{4} = -\frac{15}{2} \text{ m/s}.
\end{aligned}$$

(b) A posição da partícula em função do tempo pode ser escrita como

$$x(t) = \begin{cases} x_A + v_A t + \frac{a_{AB}t^2}{2}, & 0 \le t < t_B,\\ x_B + v_B(t-t_B), & t_B \le t < t_C,\\ x_C + v_C(t-t_C) + \frac{a_{CE}(t-t_C)^2}{2}, & t \ge t_C, \end{cases}$$

onde $v_{A,B,C}$ e $x_{A,B,C}$ são as velocidades e posições da partícula nos instantes A, B e C nos tempos $t_A = 0$, $t_B = 3$ s e $t_C = 6$ s. As velocidades podem ser lidas diretamente do gráfico: $v_A = 5$ m/s, $v_B = v_C = 15$ m/s. Já as posições podem ser obtidas das próprias equações acima, impondo o fato de que a posição deve ser uma função contínua. Por exemplo, se usarmos o resultado da primeira linha em $t_B = 3$ s temos que obter x_B. Portanto,

$$x_B = x(t_B = 3) = x_A + v_A t_B + \frac{a_{AB} t_B^2}{2} = x_A + 30 \text{ m.}$$

O valor de x_A em si é arbitrário, pois refere-se à origem do sistema de coordenadas. Sem perda de generalidade, podemos colocar $x_A = 0$. Fazendo a mesma coisa para x_C, obtemos

$$x_C = x_B + v_B(t_C - t_B) = 75 \text{ m.}$$

No instante $t_E = 10$ s a posição da partícula será, portanto,

$$x(t_E) = x_C + v_C(t_E - t_C) + \frac{a_{CE}(t_E - t_C)^2}{2} = 75 \text{ m.}$$

Ou seja, a posição é a mesma que no instante t_C. Isso ocorre por que a partir de $t_D = 8$ s a velocidade inverte de sinal e a partícula passa a se mover para trás. A distância percorrida no intervalo CD será, portanto, idêntica à distância percorrida no intervalo DE (já que a aceleração é constante).

(c) A distância total percorrida pela partícula leva em conta tanto os deslocamentos com $x > 0$ quanto com $x < 0$. Até o tempo t_D a velocidade sempre foi positiva e portanto a partícula andou sempre na mesma direção. Assim, temos

$$x_D = x_C + v_C(t_D - t_C) + \frac{a_{CE}(t_D - t_C)^2}{2} = 90\text{m.}$$

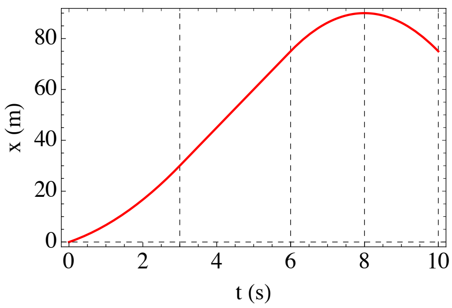
Já entre os instantes t_D e t_E, a partícula passa a se deslocar para trás. Como visto no item anterior, a distância percorrida nesse intervalo será (em módulo) igual à distância $x_D - x_C$:

$$|x_E - x_D| = x_D - x_C = 15 \text{ m.}$$

Portanto, a distância total percorrida será

$$x_D + |x_E - x_D| = 105 \text{ m.}$$

(d) A posição em função do tempo está esboçada no gráfico abaixo:



9. **(1,5 pontos) Uma criança entediada:** Uma criança entediada (e com sérios problemas de disciplina) está atirando ovos de cima de um viaduto nos carros que passam embaixo. Por causa de uma curva, a criança só passa a conseguir ver os carros quando eles estão a 50 m de distância. A altura do viaduto é de 10 m e todos os carros estão a 40 km/h. Nesse problema você pode usar $g = 10$ m/s^2.

   (a) O objetivo é calcular quanto tempo τ, depois de avistar o carro, que a criança deve soltar o ovo para atingir o capô (que está a 1 m de altura do chão). Assuma primeiro que o ovo é solto com velocidade inicial nula. Obtenha uma expressão relacionando τ com todos os parâmetros acima. Em seguida, substitua os valores.

(b) Assuma agora que o ovo pode ser arremessado com velocidade inicial v_0. Suponha que a criança escolhe jogá-lo 4 s após avistar o carro. Qual deve ser o valor de v_0 para que ele atinja o alvo? Preste atenção para o *sinal* de v_0.

(c) E se ela joga após $1,5$ s?

Solução: É mais fácil começar estabelecendo uma relação geral entre todas as variáveis envolvidas no problema. Tomamos um referencial no chão com a origem na curva onde o carro se torna visível. Contamos o tempo a partir do instante que a criança avista o carro. A posição do carro em função do tempo será, portanto,

$$x_c(t) = v_c t,$$

onde $v_c = 40$ km/h é a velocidade do carro. Com isso calculamos o tempo t_c que demora para o carro ficar logo abaixo da ponte; ou seja, para o carro andar $x_c = 50$m:

$$t_c = \frac{x_c}{v_c} = 4,5 \text{ s}.$$

O ovo será lançado τ segundos depois da criança primeiro avistar o carro. Escolhemos um referencial vertical orientado para cima e tendo o chão como origem. Portanto, a posição vertical do ovo em função do tempo, será,

$$y_{\text{ovo}}(t) = h + v_0(t-\tau) - \frac{g}{2}(t-\tau)^2,$$

onde $h = 10$ m é a altura do viaduto e v_0 é a velocidade inicial com que o ovo é arremessado. Note que, da forma como escolhemos o sistema de coordenadas, $v_0 > 0$ significa que o ovo foi atirado para cima e $v_0 < 0$ significa que ele foi atirado para baixo. Além disso, repare que por uma questão de consistência, essa expressão só é definida para $t > \tau$ (pois τ é o instante quando o ovo é arremessado).

O objetivo da criança é que no tempo t_c, onde o carro se encontra abaixo do viaduto, a altura do ovo seja $y_{\text{ovo}} = y_{\text{capô}} = 1$ m (o que significa que o ovo atingirá o alvo). Portanto, obtemos a seguinte relação:

$$y_{\text{capô}} = h + v_0(t_c-\tau) - \frac{g}{2}(t_c-\tau)^2.$$

Essa é uma relação geral entre a velocidade inicial v_0 e o tempo τ que a criança deve esperar para atirar o ovo. Todos os outros parâmetros são conhecidos.

(a): Se $v_0 = 0$ obtemos

$$(t_c-\tau)^2 = \frac{2}{g}(h - y_{\text{capô}}).$$

Essa é uma equação quadrática e portanto contém duas soluções,

$$\tau = t_c \pm \sqrt{\frac{2}{g}(h - y_{\text{capô}})}.$$

Para escolhermos qual solução tomar, temos que lembrar que por construção devemos ter $\tau < t_c$. Assim, tomamos a solução negativa:

$$\tau = t_c - \sqrt{\frac{2}{g}(h - y_{\text{capô}})} = 3,16 \text{ s}.$$

Ou seja, após avistar o carro a criança deve esperar 3,16 s para soltar o ovo.

(b): Dado $\tau = 4$ s, queremos obter v_0. Da expressão geral obtida acima chegamos a

$$v_0 = \frac{g}{2}(t_c-\tau) - \frac{(h - y_{\text{capô}})}{t_c-\tau} = -15,5 \text{ m/s}.$$

A velocidade inicial é negativa, o que significa que o ovo foi atirado para baixo. Isso faz sentido: se o ovo é solto com $v_0 = 0$, então $\tau = 3,16$ s (item (a)). Se queremos esperar mais tempo (4 s), então precisamos compensar atirando o ovo com uma velocidade inicial.

(c): Aplicando a mesma expressão do item (b) mas com $\tau = 1,5$ s, obtemos

$$v_0 = 12 \text{ m/s}.$$

Nesse caso a velocidade é positiva: a criança quer atirar o ovo cedo demais e portanto precisa arremessá-lo para cima primeiro.

10. **(0,5 ponto) Derivadas e integrais:**

(a) A posição de uma partícula viajando pela galáxia é dada por

$$x(t) = At^{42},$$

onde A é uma constante. Qual a dimensão de A? Calcule a velocidade e a aceleração correspondentes.

(b) Uma partícula é sujeita a uma aceleração

$$a(t) = \alpha t,$$

onde α é uma constante. Qual a dimensão de α? Encontre a velocidade e a posição em função do tempo. Deixe sua resposta em termos da posição e velocidades iniciais da partícula.

Solução: (a) Para que x tenha dimensão de metros, devemos ter

$$[A] = \mathrm{m/s^{42}}.$$

Para calcular a velocidade e aceleração, lembramos da expressão vista em sala de aula:

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}.$$

Com isso obtemos

$$v = \frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}t^{42} = 42At^{41}e$$

e

$$a = \frac{dv}{dt} = (42 \times 41)At^{40}.$$

Solução: (b) Para que $[a] = \mathrm{m/s^2}$ devemos ter

$$[\alpha] = \mathrm{m/s^3}.$$

Para calcular a velocidade e a posição, devemos integrar a aceleração. Lembrando que

$$\int_a^b t^n dt = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

obtemos

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')dt' = v_0 + \alpha \int_0^t t'dt' = v_0 + \frac{\alpha t^2}{2}.$$

onde v_0 é a velocidade inicial da partícula. Integrando mais uma vez obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t')dt' \\ &= x_0 + \int_0^t v_0 dt' + \frac{\alpha}{2}\int_0^t t'^2 dt' \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{\alpha t^3}{6}. \end{aligned}$$