

Mecânica Estatística - Lista 2

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 31/03/2017

Nesta lista eu quero ver o detalhe de todos os cálculos. Sinta-se a vontade de usar o Mathematica para conferir sua resposta, mas se os cálculos não constarem na sua solução o problema será anulado.

1) (2 pontos) Explorando simetrias

Sejam X , Y e Z três variáveis aleatórias iid e positivas. Calcule

$$\left\langle \frac{X}{X + Y + Z} \right\rangle$$

2) (2 pontos) Distribuição mista (MIT)

Vimos em sala como usar a função δ de Dirac para descrever distribuições discretas em termos de PDFs. Esse tipo de estrutura também é interessante quando estamos interessados em variáveis aleatórias que podem tomar valores discretos numa certa faixa e valores contínuos em outra. Por exemplo, a energia de um elétron em um átomo de hidrogênio será discreta se $E < 0$ (o que corresponde a estados ligados) mas contínua quando $E > 0$. Suponha que em um dado sistema a energia de um elétron é dada pela PDF:

$$p(E) = \begin{cases} 0.2 \delta(E + E_0), & \text{se } E < 0 \\ 0.8 \frac{e^{-E/b}}{b}, & \text{se } E > 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde $E_0 = 1.5$ eV e $b = 1$ eV.

- Qual a probabilidade de obtermos uma energia $E > 1.0$ eV?
- Qual a energia média do elétron?
- Esboce um gráfico da CDF $P(E \leq e)$.

3) (2 pontos) Duas partículas quânticas (MIT)

Duas partículas quânticas se movem sobre o eixo x com distribuição conjunta de probabilidades $p(x_1, x_2)$ dada por

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi x_0^2} \left(\frac{x_2 - x_1}{x_0} \right)^2 \exp \left\{ - \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{x_0^2} \right\} \quad (2)$$

onde x_0 é uma constante.

- Faça um gráfico de $p(x_1, x_2)$ (de preferência no computador). Determine onde, no plano (x_1, x_2) , a distribuição é máxima.
- Encontre a distribuição marginal da partícula 1 e da partícula 2. As partículas são estatisticamente independentes?
- Encontre a probabilidade condicional $p(x_1|x_2)$. Esboce um gráfico do resultado para $x_2 = 0, 1/2, 1$ e 2 .

4) (2 pontos) Distribuição lognormal

Nanopartículas produzidas por síntese química possuem uma distribuição de diâmetros que, em geral, pode ser modelada pela distribuição lognormal

$$D \sim LN(d_0, \sigma_d^2) : \quad p(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma d} \exp \left\{ - \frac{\ln^2(d/d_0)}{2\sigma^2} \right\}, \quad d > 0 \quad (3)$$

A distribuição é definida pelos parâmetros d_0 e σ_d . Mostre que o volume $V = \pi D^3/6$ também é distribuído de acordo com uma lognormal e obtenha os parâmetros da distribuição.

5) (2 pontos) Cumulantes da Poisson

Calcule todos os cumulantes da distribuição de Poisson.