Física 1 - 2020-1 - Noturno

Lista 2

Professores: Valentina Martelli e Gabriel Landi

Data de entrega: 17/04 (quarta-feira)

Para a resolução da lista, deixe bem claro o ponto de partida; diga explicitamente como você interpretou do enunciado e/ou faça diagramas. Especifique sua escolha de referencial. Na hora de escrever a resposta, não se esqueça das unidades. E use algarismos significativos. Incentivamos que você discuta os problemas com seus colegas. Mas lembre-se: a redação final é *individual*. A entrega das listas (digitalizadas) é realizada diretamente enviando ao Professor/Professora responsável da sua turma.

1. **(1 ponto) Movimento do próton:** Um próton tem inicialmente uma velocidade descrita pelo vetor: $\vec{v} = 4.0\vec{i} - 2.0\vec{j} + 3.0\vec{k}$ (em m/s). Após 4 segundos, sua velocidade mudou para $\vec{v} = -2.0\vec{i} - 2.0\vec{j} + 5.0\vec{k}$. Considerando esses 4 segundos de intervalo temporal, determine:

   (a) a aceleração media do próton $\vec{a}_{med}$ usando a notação vetorial;

   (b) o modulo da aceleração $|\vec{a}_{med}|$;

   (c) o ângulo entre o vetor $\vec{a}_{med}$ e a direção positiva do eixo x.

   Solução: (a) A aceleração media do próton $\vec{a}_{med}$ durante o intervalo de tempo $\Delta T = 4\ s$ será, usando a notação vetorial:

$$\vec{a}_{med} = \frac{(-2.0\vec{i} - 2.0\vec{j} + 5.0\vec{k}) - (4.0\vec{i} - 2.0\vec{j} + 3.0\vec{k})}{4} = (-1,5)\hat{i} + (0,5)\hat{k},$$

   em m/s^2.

   (b) O modulo da aceleração $\vec{a}_{med}$ será

$$|\vec{a}_{med}| = \sqrt{(-1,5)^2 + (0,5)^2} = 1,6 \text{ m/s}^2.$$

   (c) O ângulo entre o vetor $\vec{a}_{med}$ e a direção positiva do eixo x será

$$\alpha = \arctan\left(\frac{0,5}{-1,5}\right) = 161,57^{\circ}.$$

2. **(1 ponto) Resgate:** Um helicóptero larga um pacote de suprimentos para vítimas de uma inundação, que estão dentro de um bote em um lago. Quando o pacote é solto, o helicóptero está 120 m diretamente acima do bote e voando a 20 m/s a um ângulo de 30° para cima (Figura 1). Neste problema você pode usar $g = 10$ m/s^2.

   (a) Quanto tempo o pacote fica no ar?

   (b) A que distancia do bote o pacote cai?

   (c) Se o helicóptero continua com velocidade constante onde estará o helicóptero quando o pacote atingir o lago?

   Solução: O tempo no ar depende apenas do movimento vertical. Usando $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, podemos resolver para o tempo. Escolhemos o referencial como indicado em Figura 2, onde a origem está na posição do pacote ao ser largado. A velocidade inicial do pacote é a mesma

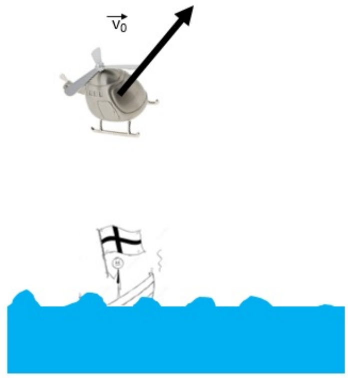


Figura 1

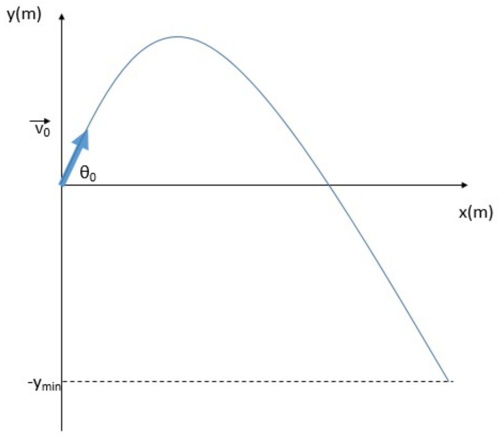


Figura 2

do helicóptero (em modulo, direção e sentido). A distancia percorrida pelo pacote é dada por $x(t) = v_{0x}t$, onde t é o tempo em que o pacote está no ar.

(a) Para encontrar o tempo de vôo, escrevemos a equação do movimento uniformemente variado considerando que, no nosso referencial, $y_0 = 0$ e $a_y = -g$:

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

O pacote fica no ar até que o $y_{min} = -120m$:

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y_{min} = 0$$

Resolvendo a equação quadratica em t, achamos em qual instante o pacote chega no ponto de altura minima.

$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy_{min}}}{g},$$

onde apenas uma das soluções será positiva. Substituindo os valores e usando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ obtemos:

$$t = \frac{v_0 \sin\theta_0 + \sqrt{(v_0 \sin\theta_0)^2 - 2gy_{min}}}{g} = 6\ \mathrm{s}.$$

(b) Sabendo o tempo que leva para chegar no chão, obtemos a posição horizontal através de:

$$x = v_0 \cos\theta_0 t = 103,923 \text{ m}.$$

(c) Se o helicóptero continua se movendo com velocidade constante, suas coordenadas em função do tempo serão dadas por

$$\boldsymbol{r}_h(t) = v_{0x} t\hat{i} + v_{0y} t\hat{j}.$$

No instante $t = 6$ s (obtido em (a)) teremos, portanto,

$$\boldsymbol{r}_h = (103,923 \text{ m})\hat{\imath} + (60 \text{ m})\hat{\jmath}.$$

Isso, claro, medido em relação à nossa origem do sistema de coordenadas. Então, por exemplo, o helicóptero estará a 180 m de altitude do solo, já que inicialmente ele estava a 120.

3. **(1 ponto) Um motociclista radical:** Um motociclista radical salta para fora da borda de um penhasco. No ponto exato da borda, sua velocidade é horizontal e possui módulo igual a 9,0 m/s. Depois de definir um referencial apropriado, encontre:

   (a) a equação horária para a posição do motociclista em função do tempo;

   (b) a distancia entre o motociclista e a borda após 0,5 s

   (c) o vetor velocidade do motociclista após 0,5 s.

Solução (a): A Fig. 4 representa a situação em questão. Colocamos a origem do sistema de coordenadas na borda do penhasco. Como a velocidade inicial é horizontal teremos $v_{0x} = v_0$ e $v_{0y} = 0$. Portanto, a posição do motociclista em função do tempo será dada por

$$x(t) = v_0 t,$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2}.$$

(b): A distância entre o motociclista e a borda do penhasco será o módulo do vetor posição

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0 t)^2 + (gt^2/2)^2}.$$

Passados 0,5 s teremos, usando $g = 9,8$ m/s,

$$r(t = 0,5s) = 4,66 \text{ m}.$$

A motocicleta mantem a mesma velocidade horizontal v_x de quando deixou o penhasco em $t = 0$. Já a velocidade em y será dada tomando a derivada de $y(t)$,

$$v_y(t) = -gt.$$

Ela é negativa pois a moto está caindo e tomamos o nosso referencial com o eixo y apontado para cima. Em $t = 0,5$ s teremos, portanto, $v_y = -gt = (-9,8\ m/s^2) * (0,5s) = -4,9\ m/s$. O vetor velocidade neste instante será dado, portanto, por

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9,0\ m/s)\hat{\imath} + (-4,9\ m/s)\hat{\jmath}.$$

De forma equivalente, podemos expressar a velocidade em termos de módulo, direção e sentido. O módulo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(9,0\ m/s)^2 + (-4,9\ m/s)} = 10,2\ m/s,$$

ao passo que o ângulo entre o vetor velocidade e o eixo x será:

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{-4,9\ m/s}{9,0\ m/s} = -29^\circ.$$

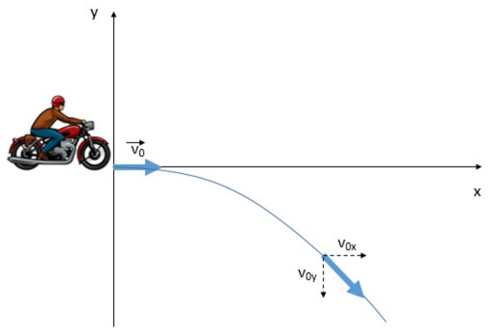


Figura 3

4. **(2 pontos) Parábola de segurança:** Considere um projétil lançado do chão com velocidade inicial v_0 e ângulo θ. O objetivo é atingir um alvo que se encontra a uma distância x_a e altura y_a. Mostre que existem dois ângulos de elevação diferentes, θ_1 e θ_2 para os quais atingimos o alvo, contanto que o ponto (x_a, y_a) esteja abaixo da "parábola de segurança", definida como

$$y_a \leq \frac{A}{2}\left(1 - \frac{x_a^2}{A^2}\right), \tag{1}$$

onde $A = v_0^2/g$ é o alcance máximo do projétil.

Solução: As equações horários para o lançamento do projétil, tomando um referencial no chão com origem no local onde o projétil é lançado, são:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t,$$

$$y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Podemos eliminar o tempo e escrever uma equação paramétrica para $y(x)$:

$$y = \tan(\theta)x - \frac{x^2}{2A\cos^2\theta},$$

onde $A = v_0^2/g$. O objetivo é encontrar os valores de θ que resolvem essa equação para um dado ponto (x_a, y_a) referente ao alvo. Ou seja, estamos interessados em resolver a equação

$$y_a = \tan(\theta)x_a - \frac{x_a^2}{2A\cos^2\theta},$$

tendo θ como variável. Podemos considerar $\theta \in [0, \pi/2]$. Portanto, defina $u = \sqrt{\cos\theta}$. Escrevendo $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}/\cos\theta$ obtemos

$$y_a = x_a\sqrt{\frac{1-u}{u}} - \frac{x_a^2}{2Au}.$$

Podemos agora manipular essa expressão para que se torne uma equação do 2o grau em u. Primeiro passamos o termo com x_a^2 para o outro lado para obter

$$y_a + \frac{x_a^2}{2Au} = x_a\sqrt{\frac{1-u}{u}}.$$

Em seguida multiplicamos ambos os lados por u:

$$y_a u + \frac{x_a^2}{2A} = x_a\sqrt{u(1-u)}.$$

Finamente, elevamos ambos os lados ao quadrado. O resultado será, após organizarmos um pouco cada termo,

$$(y_a^2 - x_a^2)u^2 + x_a^2\left(\frac{y_a}{A} - 1\right)u + \frac{x_a^4}{4A^2} = 0,$$

que está na forma de uma equação quadrática para u. De acordo com o enunciado, não precisamos de fato resolver a equação. Apenas queremos saber para quais pontos (x_a, y_a) haverão soluções. Lembre-se que para que uma equação quadrática $au^2 + bu + c = 0$ tenha solução, é necessário que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja positivo. Neste caso

$$\Delta = x_a^4 \left(\frac{y_a}{A} - 1\right)^2 - 4(y_a^2 + x_a^2)\frac{x_a^4}{4A^2} \geq 0.$$

Abrindo essa expressão obtemos

$$\Delta = x_a^4 \left[-\frac{2y_a}{A} + 1 - \frac{x_a^2}{A^2} \right] \geq 0.$$

Portanto, para que isso seja positivo, chegamos na condição,

$$y_a \leq \frac{A}{2}\left(1 - \frac{x_a^2}{A^2}\right).$$

Essa equação representa, portanto, a condição para que hajam dois ângulos θ_1 e θ_2 (ou, o que é equivalente, duas soluções u_1 e u_2) para um dado ponto (x_a, y_a). Quando $\Delta = 0$, haverá apenas uma solução. E quando $\Delta < 0$ não haverá solução.

5. **(1 ponto) Verdadeiro ou falso?** Responder se cada afirmação é verdadeira ou falsa. Justifique a sua resposta.

   (a) Um objeto não pode se mover em um círculo a menos que tenha aceleração centrípeta.

   (b) Um objeto não pode se mover em um círculo a menos que tenha aceleração tangencial.

   (c) Um objeto em movimento circular não pode ter o módulo da velocidade variável.

   (d) Um objeto em movimento circular não pode ter velocidade constante.

   Solução:

   (a) VERDADEIRO. Um objeto acelera quando a sua velocidade varia. A velocidade é um vetor e portanto pode variar tanto em módulo quanto em direção. Para um objeto que se move em movimento circular, a direção do movimento varia continuamente e portanto ele sempre terá uma aceleração centrípeta.

   (b) FALSO. Um objeto em movimento circular com módulo da velocidade constante tem a aceleração tangencial de módulo zero.

   (c) FALSO. O objeto pode ter uma velocidade variável. Por exemplo uma pedra presa à roda de um carro muda de velocidade dependendo da velocidade do carro.

   (d) VERDADEIRO. O velocidade (que é um vetor) muda continuamente de direção. Por isso ele não pode ter velocidade constante no movimento circular.

6. **(0,5 pontos) Movimento circular e vetores:** Um homem gira uma pedra presa a uma corda realizando uma trajetória circular horizontal, com velocidade constante em módulo. A Figura 4 representa a trajetória da pedra vista de cima. Responda às perguntas abaixo, justificando em cada item a sua escolha.

   (a) Quais dos vetores denotados na figura podem representar a velocidade da pedra?

   (b) Quais podem representar a aceleração?

   (c) No caso em que o movimento circular não é uniforme, indique na figura em qual região o vetor aceleração poderia ser encontrado.

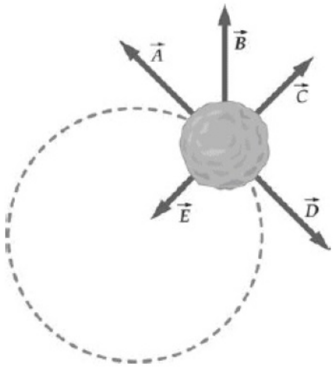


Figura 4

Solução:

(a) $\vec{A}$ e $\vec{D}$ podem representar a velocidade, pois ambos são tangenciais ao movimento realizado pela pedra.

(b) $\vec{E}$ pode representar a aceleração. Podemos verificar esboçando a velocidade $\vec{A}$ em dois instantes sucessivos (Figura 5). O raciocínio para o vetor $\vec{D}$ é equivalente ao de $\vec{A}$, de onde concluímos que somente o vetor $\vec{E}$, com direção radial e sentido apontando para o centro do circulo, pode representar a aceleração.

(c) A aceleração centrípeta é sempre ara dentro do círculo. Portanto, o vetor aceleração, no caso geral, pode ser encontrado em qualquer ponto da região entre os vetores $\vec{A}$, $\vec{E}$ e $\vec{D}$.

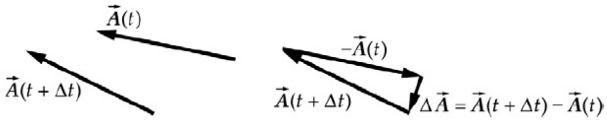


Figura 5

7. **(1,5 pontos) Duas rodas:** Na figura 6, a roda maior, de $R = 30$ cm de raio, transmite seu movimento à roda menor, de $r = 20$ cm de raio, através da correia C, que permanece sempre bem esticada e sem deslizamento.

   (a) Encontre uma expressão relacionando a velocidade angular da roda menor com a velocidade angular da roda maior.

   (b) Suponha que a roda maior, partindo do repouso, é acelerada uniformemente por 1 minuto. Durante este intervalo observa-se que ela efetua um total de 540 rotações. Calcule a velocidade angular da roda menor e a velocidade linear da correia após este intervalo.

Solução (a): Para resolver este problema precisamos lembrar que a velocidade linear e a velocidade angular de um objeto estão relacionadas por $\omega = v/r$. Seja $\Omega(t)$ a velocidade angular da roda maior e seja $R = 30$ cm o seu raio. A sua velocidade linear será portanto $v(t) = \Omega(t)R$. Mas como a correia gira sem deslizamento, a velocidade da correia também será exatamente $v(t)$. Por outro lado, se $\omega(t)$ for a velocidade angular da roda menor, de raio $r = 20$ cm, então teremos $\omega(t) = v(t)/r$. As velocidades angulares das duas rodas estarão, portanto, relacionadas através de

$$\Omega(t)R = v(t) = \omega(t)r.$$

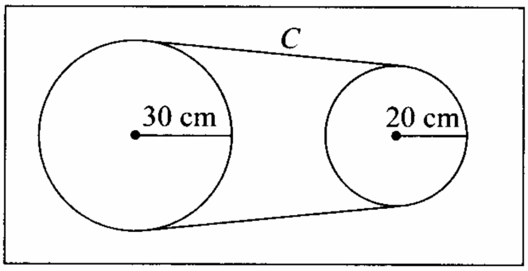


Figura 6

Ou seja,

$$\omega(t) = \frac{\Omega(t)}{R} r.$$

Teste de sanidade: como $R > r$, a roda menor gira mais rápido.

(b) A roda maior é acelerada uniformemente, partindo do repouso. Portanto, sua posição angular $\theta(t)$ em função do tempo será dada por

$$\theta(t) = \frac{\alpha t^2}{2},$$

onde α é a aceleração angular. Sabemos quem em $t_f = 60$ s a roda girou $\theta(t_f) = 540 \times 2\pi$ rad. Portanto a aceleração angular será

$$\alpha = \frac{2\theta(t_f)}{t_f^2} = \frac{3\pi}{5} \text{ rad/s}^2.$$

A sua velocidade angular no instante t_f será, portanto,

$$\Omega(t_f) = \alpha t_f = 36\pi \text{ rad/s}.$$

Com isso, a velocidade da correia será

$$v(t_f) = \Omega(t_f) R = \frac{54\pi}{5} \text{ m/s},$$

e a velocidade angular da roda menor será

$$\omega(t_f) = 54\pi \text{ rad/s}.$$

8. **(1 ponto) Quadro suspenso:** Um quadro de massa $M = 1\ kg$ é suspenso por dois fios com tensões T_1 e T_2, como mostrado em Figura 7. Encontre a tensão em cada corda.

Solução: Como o quadro não está acelerado, a força resultante sobre ele deve ser zero. As três forças sobre o quadro (a força gravitacional $\vec{F_g}$ e as forças de tensão $\vec{T_1}$ e $\vec{T_2}$) devem, portanto, somar zero. Desenhando o corpo livre, como na Figura 8, podemos decompor as forças em cada eixo. Pela segunda lei de Newton:

$$\vec{F_{tot}} = m\vec{a}$$

então:

$$\vec{F_g} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m\vec{a} = 0$$

No eixo-x temos:

$$T_{1x} + T_{2x} + F_{gx} = 0,$$

ou

$$T_1 \cos 30^o + T_2 \cos 60^o + 0 = 0.$$

Já no eixo-y, teremos

$$T_{1y} + T_{2y} + F_{gy} = 0,$$

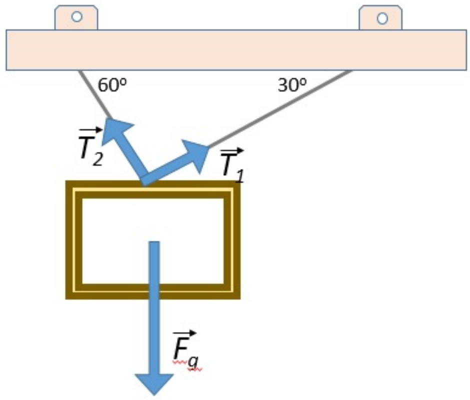


Figura 7

ou

$$T_1 \sin 30^o + T_2 \sin 60^o - F_{gy} = 0.$$

Resolvendo a equação em x para T_2 obtemos:

$$T_2 = T_1 \frac{\cos 30^o}{\cos 60^o}$$

Substituindo o resultado para T_2 na equação em y e resolvendo para T_2, obtemos:

$$T_1 \sin 30^o + \left(T_1 \frac{\cos 30^o}{\cos 60^o} \right) \sin 60^o - F_g = 0$$

Ou seja,

$$T_1 = 0.5 \cdot mg = 5.0 \ N$$

e

$$T_2 = T_1 \frac{\cos 30^o}{\cos 60^o} = 8.7 \ N$$

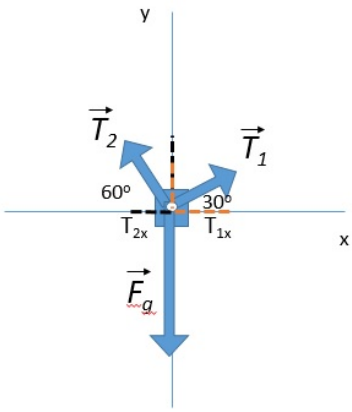


Figura 8

9. **(1 ponto):** A figura 9 apresenta o diagrama das diversas forças (vistas de cima) atuando sobre um certo objeto que se encontra em um plano com atrito desprezível.

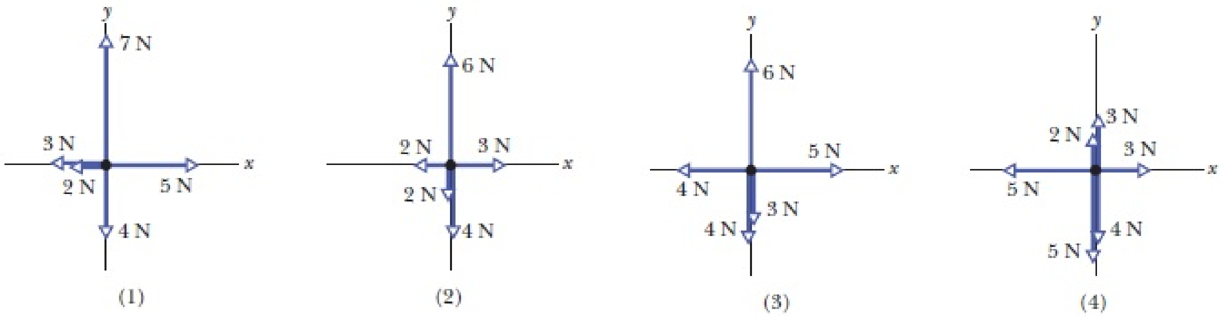


Figura 9

Em cada um dos casos, calcule o vetor da força resultante e o seu módulo. Além disso, esboce a direção e sentido da aceleração resultante $\vec{a}$.

Solução: A força total resultante é a soma vetorial das forças envolvidas:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots.$$

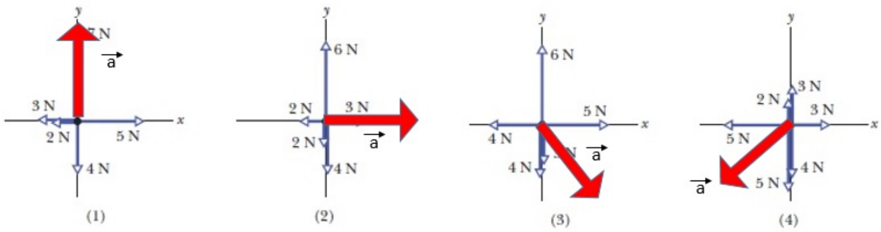
Para cada um dos casos teremos, portanto (todas as forças em N):

$$\begin{aligned}
(1): \quad & \vec{F} = (5\hat{\imath}) - (4\hat{\jmath}) - (3\hat{\imath}) - (2\hat{\imath}) + (7\hat{\jmath}) \\
& = 3\hat{\jmath} \\
(2): \quad & \vec{F} = (3\hat{\imath}) - (4\hat{\jmath}) - (2\hat{\jmath}) - (2\hat{\imath}) + (6\hat{\jmath}) \\
& = 1\hat{\imath} \\
(3): \quad & \vec{F} = (5\hat{\imath}) - (3\hat{\jmath}) - (4\hat{\jmath}) - (4\hat{\imath}) + (6\hat{\jmath}) \\
& = 1\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} \\
(4): \quad & \vec{F} = (3\hat{\imath}) - (4\hat{\jmath}) - (5\hat{\jmath}) - (5\hat{\imath}) + (2\hat{\jmath}) + (3\hat{\jmath}) \\
& = -2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

O módulo da força em cada caso será, portanto,

$$\begin{aligned}
(1): \quad & |\vec{F}| = 3 \;\; \mathrm{N} \\
(2): \quad & |\vec{F}| = 1 \;\; \mathrm{N} \\
(3): \quad & |\vec{F}| = \sqrt{2} \;\; \mathrm{N} \\
(4): \quad & |\vec{F}| = 2\sqrt{5} \;\; \mathrm{N}
\end{aligned}$$

A aceleração está diretamente relacionada com a força pela 2a lei de Newton, $\vec{a} = \vec{F}/m$. Portanto, a direção de $\vec{a}$ será a mesma de $\vec{F}$, que está denotada na Fig. 10.



y
7 N
a
3 N
2 N
5 N
x
4 N
(1)
y
6 N
2 N
3 N
2 N
a
4 N
(2)
y
6 N
5 N
x
4 N
a
4 N
(3)
y
2 N
3 N
3 N
x
5 N
4 N
a
5 N
(4)

Figura 10