Mecânica Estatística - Lista 3

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 26/04/2017

Em nenhum problema dessa lista será permitido usar o Mathematica para realizar os cálculos. Você até pode usá-lo para *conferir* a sua resposta, mas eu quero ver a solução passo a passo de cada problema.

1) (2,5 pontos) Distribuição binormal

Considere uma distribuição binormal com PDF

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \tag{1}$$

onde $\sigma_x = \mathrm{Var}(X)$, $\sigma_y = \mathrm{Var}(Y)$ e $\rho = \mathrm{Corr}(X,Y)$. Mostre que a probabilidade condicional $p_{X|Y}(x|y)$ também é normal, e encontre os parâmetros da distribuição. Em geral escrevemos isso como $X|Y = y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. O objetivo é encontrar μ e σ^2. Discuta o significado do seu resultado, prestando particular atenção para o que ocorre nos limites $\rho \to \pm 1$ e $\rho \to 0$.

2) (2,5 pontos) A regra dos cinco segundos

De acordo com o folclore popular, sempre que um alimento cai no chão, nós temos 5 segundos para pegá-lo antes que os micróbios comecem a devorá-lo (conhecido como a *regra dos 5 segundos*). Na verdade, o número de micróbios N_t que chegam ao alimento após um tempo t será uma variável aleatória e é razoável esperar que ela seja distribuída de acordo com uma distribuição de Poisson, $p_n = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$, onde λ é um parâmetro que mede a taxa (em micróbios por segundo) com que os micróbios chegam ao alimento.

(a) Suponha que existe um número crítico $\mathcal{N}_c$ de micróbios a partir do qual deixa de ser seguro ingerir o alimento. Esse valor poderia ser estabelecido, por exemplo, por uma agência de vigilância sanitária. Calcule o tempo crítico t_c tal que $\langle N_{t_c}\rangle = \mathcal{N}_c$. É essa grandeza que esperamos ter o valor $t_c = 5$ segundos (no entanto, deixe sua resposta em termos de um t_c genérico).[1]

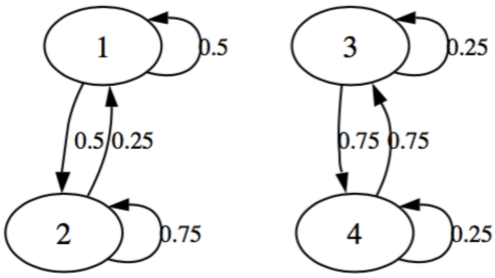
(b) Considere agora a fração relativa de micróbios $X_t := N_t/\mathcal{N}_c$. Use o teorema central do limite para obter uma distribuição de probabilidades aproximada para X_t. Qual a condição sobre os parâmetros do problema para que essa aproximação seja razoável? Escreva sua resposta final somente em termos de t, t_c e $\mathcal{N}_c$.

(c) Uma pergunta natural que segue dessa análise é: "Qual a probabilidade de observar uma violação da regra dos 5 segundos?" Mostre como expressar essa grandeza matematicamente e forneça uma resposta tanto no caso geral, onde a distribuição é Poisson, quanto no caso do item (b), onde foi usado o teorema central do limite. Você pode deixar o seu resultado em termos de somas ou integrais. O que ocorre com essa probabilidade no limite $\mathcal{N}_c \to \infty$?

[1] Muito recentemente foi demonstrado que o tempo crítico não é 5 segundos; vide, R.C. Miranda e D. W. Schaffner, *Appl. and Envir. Microbiology*, (2016). Na verdade t_c varia consideravelmente para diferentes alimentos e diferentes pisos.

3) (2,5 pontos) Cadeia de Markov

(Harvard) Considere a cadeia de Markov abaixo



(a) Encontre a matriz de transição. Essa cadeia é irredutível?

(b) Encontre duas distribuições estacionárias diferentes para esta cadeia.

(c) Suponha que o sistema começa a evolução no estado $\boldsymbol{p}(0) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$. Para qual estado o sistema vai tender após passado um tempo muito longo?

4) (2,5 pontos) Um rei se movendo em um tabuleiro de xadrez

(Harvard) No Xadrez o rei pode se mover em qualquer direção (horizontal, vertical e diagonal) mas somente um quadrado por vez. Suponha que o rei está vagando aleatoriamente por um tabuleiro vazio, com os movimentos em cada uma das direções sendo igualmente prováveis. Encontre a distribuição estacionária (por favor, não lista um vetor com 64 entradas! Classifique os 64 quadrados em "tipos" e forneça a probabilidade estacionária para cada tipo de quadrado).