Física 1 - 2020-1 - Noturno

Lista 4

Professores: Valentina Martelli e Gabriel Landi

Data de entrega: 20/05 (quarta-feira)

Para a resolução da lista, deixe bem claro o ponto de partida; diga explicitamente como você interpretou do enunciado e/ou faça diagramas. Especifique sua escolha de referencial. Na hora de escrever a resposta, não se esqueça das unidades. E use algarismos significativos. Incentivamos que você discuta os problemas com seus colegas. Mas lembre-se: a redação final é *individual*. A entrega das listas (digitalizadas) é realizada diretamente enviando ao Professor/Professora responsável da sua turma.

1. **(1 ponto) Máquina de Atwood:** Considere o sistema da Fig. 1, onde $M > m$. No instante $t = 0$, o suporte S é subitamente retirado. (a) Usando conservação de energia, calcule a velocidade que a massa M terá ao atingir o chão. (b) Verifique seu resultado usando as leis de Newton.

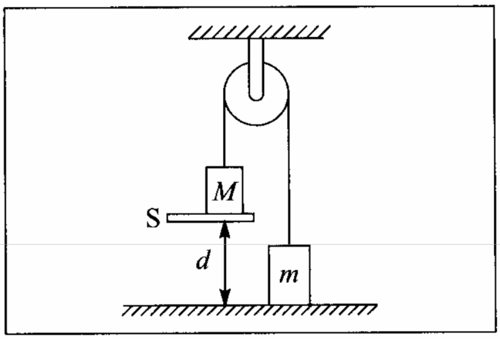

Figura 1

Solução: A energia total antes do suporte ser retirado era puramente potencial e dada por $E_i = Mgd$. Por outro lado, quando o bloco M chega ao chão a energia total será

$$E_f = mgd + \frac{1}{2}(M+m)v^2,$$

(onde estamos usando que m e M se movem em conjunto e, portanto, tem a mesma velocidade). Como a energia é conservada, devemos ter $E_f = E_i$. Portanto,

$$v^2 = 2gd\left(\frac{M-m}{M+m}\right).$$

Por outro lado, podemos encontrar v também usando as leis de Newton. Usamos um sistema de coordenadas apontando para baixo. A 2a lei para os dois blocos será

$$MA = Mg - T,$$

$$ma = T - mg.$$

Como ambos se movem em conjunto, devemos ter $A = a$. Somando as duas equações, chegamos portanto a

$$(M+m)A = (M-m)g.$$

O movimento será portanto uniformemente acelerado, com aceleração $A = g(M-m)/(M+m)$. Da expressão de Torricelli chegamos então a

$$v^2 = 2Ad = 2gd\left(\frac{M-m}{M+m}\right),$$

que é o mesmo resultado de antes.

2. **(1 ponto) Força e trabalho:** A Figura 2 representa a aceleração de uma partícula de massa 2 kg sob a ação de uma força externa $\vec{F_a}$ que a move partindo do repouso,de $x = 0\ m$ a $x = 9\ m$. Na escala da aceleração do gráfico, $a_s = 6\ m/s^2$.

   (a) Qual é o trabalho realizado pela força quando a partícula chega nas posições $x = 4$ m, 7 m, 9 m?

   (b) Qual a velocidade (modulo, direção e sentido) da partícula quando chega nas posições $x = 4$ m, 7 m, 9 m?

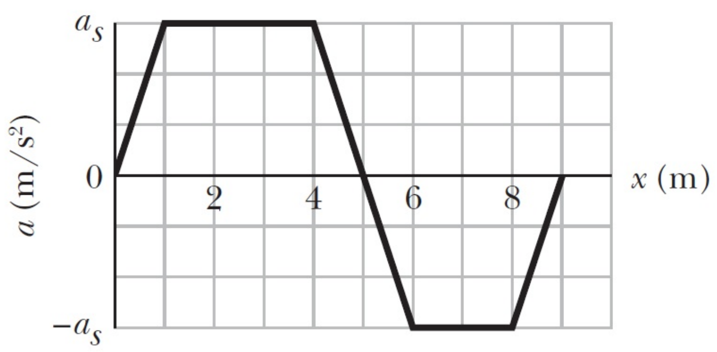

Figura 2

Solução: (a) Multiplicando o eixo vertical do gráfico pela massa da partícula, obtemos o gráfico da força aplicada. Para calcular o trabalho, calculamos a área sob a curva:

$$x = 0 \to x = 4: \quad W = 42 \text{ J}$$

$$x = 0 \to x = 7: \quad W = 30 \text{ J}$$

$$x = 0 \to x = 9: \quad W = 12 \text{ J}$$

(b) A velocidade é sempre na direção x. Sabemos que a partícula começa a se mover do repouso. Usando o teorema da energia cinética, temos portanto que

$$\frac{1}{2}mv^2 = W.$$

Substituindo os valores do item (a) obtemos:

$$x = 0 \to x = 4: \quad v = 6,5 \text{ m/s}$$

$$x = 0 \to x = 7: \quad v = 5,5 \text{ m/s}$$

$$x = 0 \to x = 9: \quad v = 3,5 \text{ m/s}$$

O sentido da velocidade nos três casos é positivo.

3. **(1 ponto) Iglu:** Um rapaz escorrega do alto do seu iglu, que é aproximadamente semi-esférico de raio R. Supondo que o atrito pode ser desprezado, mostre que o rapaz perde contato com o iglu num ponto cuja altura é $2R/3$. Dica: ele perde o contato no instante em que a normal com o iglu se anula.

Solução: Seja θ o ângulo que o rapaz faz com a vertical, de tal forma que a sua altura num instante qualquer seja $y = R\cos\theta$. A força resultante na direção normal à superfície do iglu deve fornecer uma componente puramente centrípeta. Ou seja,

$$N - mg\cos\theta = -\frac{mv^2}{R}.$$

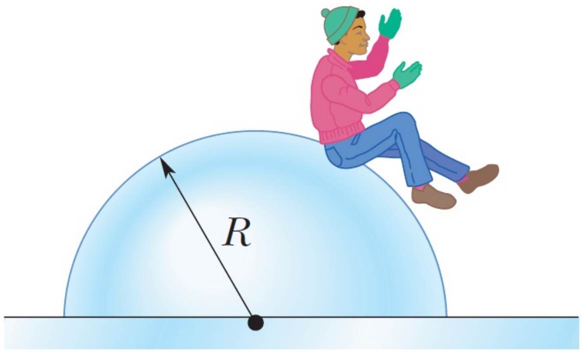

Figura 3

Outra forma de ver isso é usar um referencial não inercial que se move junto com o rapaz. Nesse referencial a 2a lei fornece

$$m\boldsymbol{a} = -mg(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) + N\hat{j} + \frac{mv^2}{R}\hat{j},$$

onde o último termo é a força centrífuga que surge de estarmos lidando com um referencial não inercial. A normal vai compensar a componente y da força resultante e, portanto, obtemos $N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}$.

O ponto onde o garotinho se descola do iglu será quando $N = 0$. Ou seja, $\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta$. Por outro lado, de conservação de energia temos que

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta$$

onde v é a velocidade da partícula no instante em que o ângulo vale θ. Substituindo o resultado anterior para mv^2 obtemos $\cos\theta = \frac{2}{3}$ e, portanto,

$$y = R\cos\theta = \frac{2R}{3}.$$

4. **(1,5 ponto) Loop:** Num parque de diversões, um carrinho da montanha russa desce de uma altura h para passar num loop de raio R (Fig. 4).

   (a) Qual o menor valor de h_{min} necessário para que o carrinho consiga dar a volta no loop? (Vidas estão em jogo! Contamos com você!) Mostre também que se $R < h < h_{\text{min}}$, o carrinho vai descolar do trilho num ponto B que faz um ângulo θ com o ponto mais alto, A, assim como mostrado na figura. Calcule θ.

   (b) O que acontece quando $h < R$?

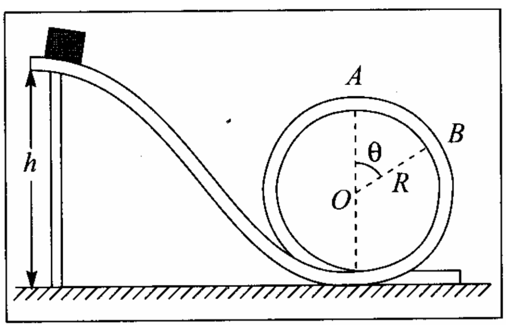

Figura 4

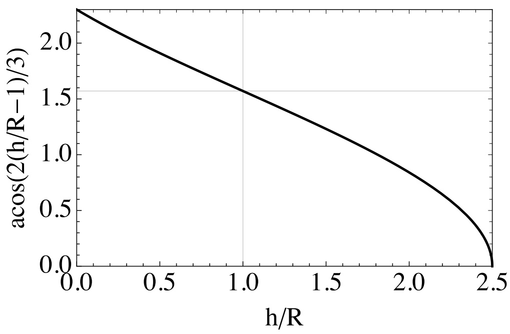

Figura 5: O ângulo θ onde a normal se anula vs. h/R, calculado da Eq. (1).

Solução: (a) A normal que o trilho exerce sobre o carrinho é calculada de forma semelhante ao exercício anterior e vale

$$N = \frac{mv^2}{R} - mg\cos\theta.$$

O sinal negativo no último termo vem da forma como θ é definido na Fig. 4. Por exemplo, se $\theta = \pi$ temos uma contribuição $+mg$; ou seja, para cima. Estamos interessados no ponto θ onde a normal se anula. A velocidade nesse ponto será, portanto,

$$mv^2 = mgR\cos\theta.$$

Por outro lado, da conservação de energia temos que

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1+\cos\theta),$$

onde o último termo também foi ajustado tendo em vista a definição de θ (por exemplo, se $\theta = \pi$ não há energia potencial). Substituindo o resultado para mv^2 obtemos então

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right). \tag{1}$$

Essa equação define o ângulo θ onde a normal se anula. Ou seja, onde o carrinho se descola do trilho.

Mas o que queremos, na verdade, é saber qual a altura mínima h_{min} para que isso não ocorra. Como $\cos\theta \in [-1, 1]$, a equação acima não terá solução quando

$$\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right) \geq 1.$$

Essa condição define a altura h_{min}:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{h_{\text{min}}}{R} - 1\right) = 1 \qquad \to \qquad h_{\text{min}} = \frac{5R}{2}.$$

Se $h > h_{\text{min}}$, não haverá ângulo θ onde a normal se anula.

Por outro lado, se $h < h_{\text{min}}$ o carrinho vai se descolar. O valor de θ onde isso ocorre é dado pela Eq. (1).

(c) O ângulo θ em função de h/R [Eq. (1)] está mostrado na Fig. 5. Como pode ser visto, quando $h < R$ passamos a ter uma solução com $\theta > \pi/2$. Isso significa que a normal vai se anular no primeiro quadrante, o que não é um problema, pois o carrinho não tem para onde cair: a normal vai se anular e o carrinho vai parar, mas depois ele vai começar a deslizar de volta e vai ficar oscilando no fundo. Ou seja, quando $\theta > \pi/2$ anular a normal não causa um acidente.

5. **(1 ponto) Chapéu mexicano:** Uma partícula move-se em uma dimensão sob a ação de uma energia potencial

$$U(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4.$$

onde a e b são constantes positivas (vide Fig. 6).

(a) Calcule a força que atua sobre a partícula.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio. Ou seja, os pontos onde a força resultante é nula.

(c) Sem fazer nenhuma conta, usando apenas a Fig. 6 como referência, discuta quais pontos do item (b) representam equilíbrio estável ou instável.

(d) Suponha que $a = 1\text{J}/\text{m}^2$ e $b = 0,25\text{J}/\text{m}^4$. Se a partícula parte do repouso numa posição inicial $x_0 = 2,8$ m, ela será capaz de passar para o outro lado (ou seja, adentrar à região com $x < 0$)? Dica: essa questão não requer nenhum cálculo sofisticado. Basta usar conservação de energia.

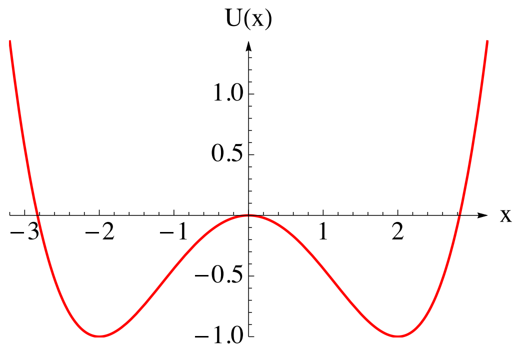

Figura 6

Solução: (a) A força é obtida como menos a derivada da energia potencial,

$$F = -\frac{dU}{dx} = ax - bx^3.$$

(b) Resolvemos para $F = 0$. Podemos por um x em evidência e escrever $F = x(a - bx^2)$. Vemos, portanto, que os pontos de equilíbrio são

$$x = 0, \qquad x = \pm\sqrt{a/b}.$$

(c) Vemos da Fig. 6 que claramente o ponto $x = 0$ corresponde a um máximo da energia potencial e, portanto, um ponto de equilíbrio instável. Já os outros dois pontos, $x = \pm\sqrt{a/b}$ correspondem a mínimos de U e portanto são pontos de equilíbrio estável.

(d) A partícula começa na direita ($x > 0$). Para poder passar para a esquerda, ela deve superar a barreira de potencial que existe em $x = 0$. A altura dessa barreira é $U(0) = 0$. Por outro lado, a energia inicial do sistema será, usando $a = 1\text{J}/\text{m}^2$, $b = 0,25\text{J}/\text{m}^4$ e $x_0 = 2,8$ m,

$$U(x_0) = -0.0784 \text{ m}.$$

Como $U(x_0) < U(0)$, o sistema não tem energia suficiente para superar a barreira e portanto nunca vai passar para o lado esquerdo.

6. **(1 ponto) Energia potencial:** A figura 7 representa a energia potencial $U(x)$ como funçao da posição x de uma partícula de massa 0.90 kg que se desloca ao longo da direção x. Todas as forças que atuam são conservativas. Os três valores indicados em figura são $U_A = 15\ J$, $U_B = 35\ J$, $U_C = 45\ J$. A partícula é liberada da posição $x = 4.5\ m$ com velocidade $v = 7.0\ m/s$ na direção negativa do eixo x.

   (a) Se a partícula conseguir chegar em $x = 1.0\ m$, qual será o módulo da velocidade nesse ponto? Caso ela não consiga, em qual ponto ela vai começar a voltar para trás, invertendo o sentido?

   (b) Determine a força (módulo, direção, sentido) da partícula quando ela começa a se mover à esquerda de $x = 4.0\ m$.

Suponha agora que a partícula seja liberada da posição $x = 4.5$ m com velocidade $v = 7.0$ m/s na direção positiva do eixo x.

(c) Se a partícula conseguir de chegar em $x = 7.0$ m, qual será o módulo da velocidade nesse ponto? Caso ela não consiga, em qual ponto ela vai começar a voltar para trás, invertendo o sentido?

(d) Determine a força (módulo, direção, sentido) da partícula quando ela começa a se mover à direita do ponto $x = 5.0$ m.

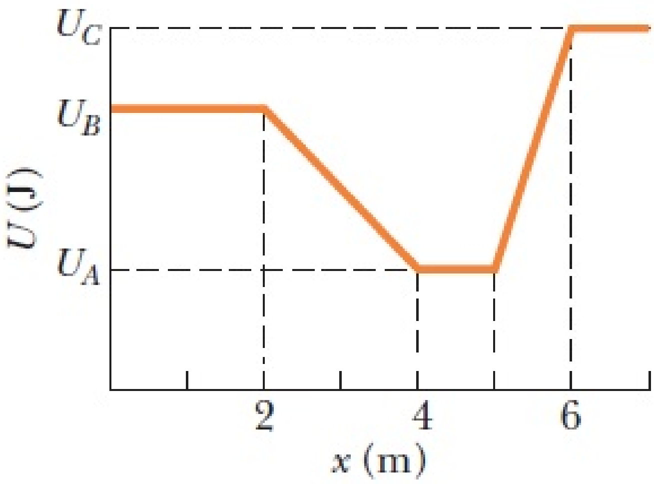

Figura 7

Solução: Da figura, podemos ver que na posição $x = 4.5$ m, a energia potencial é $U(4.5\ m) = 15$ J. Além disso, como sabemos que a velocidade vale, em módulo, 7.0 m/s, temos que a energia cinética será

$$K(4.5\ m) = \frac{1}{2}mv^2 = (0.9\ m)(7.0\ m/s)^2/2 = 22\ J.$$

Portanto, a energia mecânica total será

$$E = K(4.5\ m) + U(4.5\ m) = 37\ J$$

CASO 1: $v_0 = -7$ m/s, no sentido negativo do eixo x:

(a) na posição $x = 1.0$ m, a energia potencial é $U(x = 1.0\ m) = 35$ J, então $K(x = 1.0\ m) = 2\ J > 0$. A partícula chega em $x = 1.0$ m com módulo da velocidade:

$$v = \sqrt{\frac{2K(x = 1.0\ m)}{m}} = \sqrt{\frac{2(2\ J)}{0.9\ kg}} = 2.1\ m/s$$

(b) Quando a partícula está se movendo à esquerda de 4 m (até 2 m), a força pode ser obtida a partir da derivada da energia potencial:

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{35\ J - 15\ J}{2\ m - 4\ m} = 10\ N$$

que aponta no sentido positivo do eixo x.

CASO 2: $v_0 = +7$ m/s, no sentido positivo do eixo x:

(c) na posição $x = 7.0$ m, a energia potencial é $U(x = 1.0\ m) = 45$ J, que é maior que energia total inicial. Portanto, a partícula nunca vai conseguir atingir essa posição. No ponto onde o partícula volta para trás, a energia cinética será zero. Entre 5 m e 6 m, temos que a energia potencial é dada por:

$$U(x) = 15 + 30(x - 5), \qquad 5 < x < 6$$

O ponto de inversão pode então ser calculado:

$$37 = 15 + 30(x - 5) \Rightarrow x = 5.7\ m$$

(c) Quando a partícula está se movendo à direita de 5 m (até 2 m), a força pode ser obtida a partir da derivada da energia potencial:

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{45\ J - 15\ J}{6\ m - 5\ m} = -30\ N$$

que aponta no sentido negativo do eixo x.

7. **(1 ponto) Interação molecular:** A energia potencial de interação entre dois átomos de uma molécula diatômica (H_2 ou O_2, por exemplo) é descrita pelo potencial de Lennard-Jones,

$$U(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6},$$

onde A e B são constantes positivas. Esse potencial está ilustrado na Fig. 8

(a) Quais as dimensões de A e B?

(b) Calcule o ponto de equilíbrio x_{eq}.

(c) Baseando-se somente na Fig. 8, para $x > x_{\text{eq}}$ a força é atrativa ou repulsiva? E para $x < x_{\text{eq}}$?

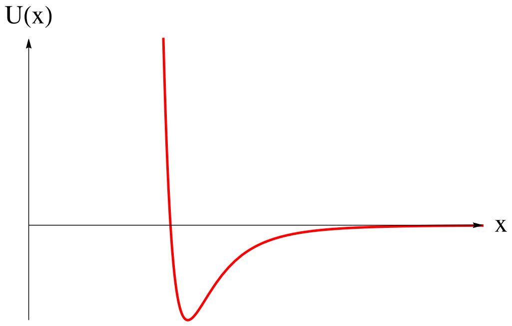

Figura 8

Solução: (a) Como $[U] =$ J e $[r] =$ m, devemos ter $[A] = \text{J m}^{12}$ e $[B] = \text{J m}^6$.

(b) O ponto de equilíbrio é obtido calculando a força e vendo onde ela se anula. Derivando $U(x)$ obtemos

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{12A}{x^{13}} - \frac{6B}{x^7}.$$

Igualando a zero chegamos então a

$$x^* = (2A/B)^{1/6}.$$

(c) Na vizinhança de ponto de equilíbrio estável a força é sempre restauradora. À direta de x^*, portanto, a força será para a esquerda. E à esquerda, a força será para a direita. Isso segue da expressão $F = -dU/dx$. A derivada é a taxa de inclinação. A força, portanto, será menos a taxa de inclinação. À direita de x^*, essa taxa de inclinação é positiva e portanto a força é negativa.

8. **(0,5 ponto) Queijo voador:** Um pedaço de queijo de 1,2 kg é posto sobre uma mola de massa desprezível e constante $k = 1800$ N/m. A mola é então comprimida

de 15 cm e solta subitamente. Qual a altura máxima atingida pelo queijo? O queijo não está preso à mola.

Solução: A energia potencial inicial armazenada no sistema será $E_i = \frac{1}{2}kx_0^2$ onde $x_0 = 0.15$ cm. Por conservação de energia, essa deve também ser a mesma energia que o queijo terá quando atinge a altura máxima. Nesse caso, no entanto, o queijo estará somente sob a ação da força gravitacional. Portanto, $E_f = mgh$. Igualando $E_f = E_i$ chegamos a

$$h = \frac{kx^2}{2mg} = 1,72 \text{ m.}$$

9. **(1 ponto) Escorregador:** A Fig. 9 descreve uma criança cúbica descendo num escorregador de altura 5 m. Suponha que durante a descida o atrito possa ser desprezado. No final do brinquedo há uma região AB com coeficiente de atrito cinético μ_c, onde a criança será freada até parar. Supondo que ela demorou $1,25$ s para parar (contados a partir do instante em que ela chegou em A), qual o valor de μ_c?

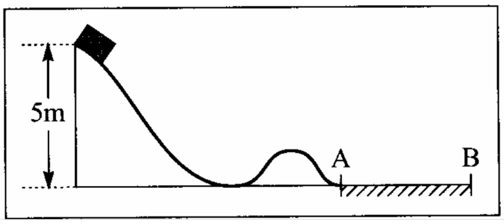

Figura 9

Solução: Seja $h = 5$ m. Por conservação de energia, a velocidade da criança ao atingir o ponto A será dada por

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Quando ela entra na região A, a segunda lei com atrito cinético fornece

$$ma = -\mu_c N = -\mu_c mg$$

Ou seja, a criança desacelera com $a = -\mu_c g$. O movimento é uniformemente desacelerado, com velocidade inicial $v_0 = \sqrt{2gh}$, calculado anteriormente. Portanto

$$v(t) = v_0 - at = \sqrt{2gh} - \mu_c gt.$$

Seja Δt o tempo que ela demora para parar. Teremos, então,

$$\mu_c = \frac{1}{\Delta t}\sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 0.808.$$

É importante notar nesse problema também que a pequena lombada que existe antes de A não tem influência alguma. Como a descida é sem atrito, toda a energia potencial consumida para subir a lombada é recuperada na descida.

10. **(1 ponto) Forças em duas dimensões:** Um campo de forças bidimensional é descrito pela expressão:

$$\vec{F} = f_x\hat{\imath} + f_y\hat{\jmath} = (ax + ay)\hat{\imath} + (ax + by^2)\hat{\jmath},$$

onde a e b são constantes positivas. O campo é conservativo? Justifique a sua resposta.

Solução: Sim, o campo é conservativo. Podemos demonstrar que o campo é conservativo em duas formas equivalentes.

(1) Verificar que as derivadas parciais cruzadas das componentes do campo são iguais:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = a$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = a$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

(2) Ou calcular o trabalho escolhendo um caminho fechado e verificar que dá zero. Escolhemos um caminho como o da figura 10.

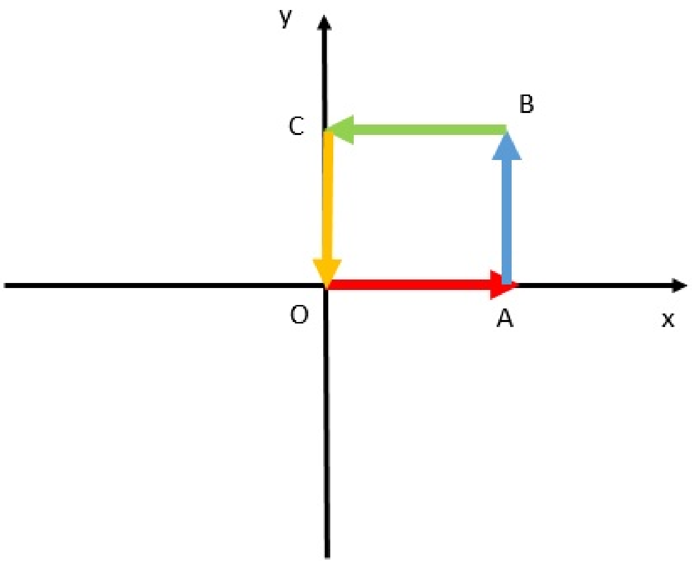

Figura 10

Os pontos têm coordenadas: O=(0,0), A=($\bar{x}$, 0), B=($\bar{x}$, $\bar{y}$), C=(0, $\bar{y}$).

Calculamos o trabalho ao longo do caminho OA+AB+BC+CO, segmento por segmento, parametrizando as trajetórias.

Segmento OA: $\begin{cases} x = h \Rightarrow dx = dh \\ y = 0 \Rightarrow dy = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow L(O \to A) = \int_O^A (f_x dx + f_y dy) = \int_O^{\bar{x}} ahdh = \frac{1}{2}a\bar{x}^2$$

Segmento AB: $\begin{cases} x = \bar{x} \Rightarrow dx = 0 \\ y = h \Rightarrow dy = dh \end{cases}$

$$\Rightarrow L(A \to B) = \int_A^B (f_x dx + f_y dy) = \int_O^{\bar{y}} (a\bar{x} + bh^2)dh = a\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{3}b\bar{y}^3$$

Segmento BC: $\begin{cases} x = h \Rightarrow dx = dh \\ y = \bar{y} \Rightarrow dy = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow L(B \to C) = \int_B^C (f_x dx + f_y dy) = \int_{\bar{x}}^0 (ah + a\bar{y})dh = -\frac{1}{2}a\bar{x}^2 - a\bar{y}\bar{x}$$

Segmento CO: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ y = h \Rightarrow dy = dh \end{cases}$

$$\Rightarrow L(C \to O) = \int_C^O (f_x dx + f_y dy) = \int_{\bar{y}}^0 (bh^2)dh = -\frac{1}{3}b\bar{y}^3$$

$$\Rightarrow L = L(O \to A) + L(A \to B) + L(B \to C) + L(C \to O) = 0$$