Mecânica Quântica 2 - Lista 2

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 03/03 (terça-feira)

1) (2 pontos) Trabalhando com o singleto e o tripleto.

Para esse programa, vide o notebook do Mathematica "Lista 2-1.nb".

2) (3 pontos) Modelo de Ising

No modelo de Heisenberg a interação entre dois spins é dada por $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$. O modelo de Ising corresponde a uma simplificação desse modelo onde substituímos a interação por $\sigma_1^z \sigma_2^z$. Ou seja, pegamos apenas a componente z.

(a) Considere o caso de duas partículas de spin 1/2 com Hamiltoniano

$$\hat{H} = -J\sigma_1^z \sigma_2^z$$

onde $J > 0$. No contexto do magnetismo J é conhecido como *constante de troca*. Quais os autovalores e autovetores desse Hamiltoniano? Argumente que o estado fundamental corresponde a um sistema ferromagnético. Ou seja, um sistema onde os spins estão alinhados na mesma direção.

(b) Considere agora o mesmo Hamiltoniano do item anterior, mas suponha que $J < 0$. Mostre que o estado fundamental corresponde aos spins anti-paralelos. Isso é o que ocorre em um material antiferromagnético, como por exemplo o NiO.

(c) Considere agora o mesmo sistema na presença de um campo magnético:

$$\hat{H} = -J\sigma_1^z \sigma_2^z - \mu B(\sigma_1^z + \sigma_2^z)$$

Quais os autovalores e autovetores supondo novamente que $J < 0$?

(d) Suponha que existem um conjunto de N spins 1/2 alinhados em uma cadeia unidimensional. Se cada spin interage apenas com os seus dois primeiros vizinhos, então o Hamiltoniano na ausência de um campo será:

$$\hat{H} = -J\sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z = -J(\sigma_1^z\sigma_2^z + \sigma_2^z\sigma_3^z + \ldots + \sigma_{N-1}^z\sigma_N^z)$$

Qual o estado fundamental deste sistema para $J > 0$? E para $J < 0$?

3) (2 pontos) Hamiltoniano de duas partículas de spin 1/2

Uma físico malandro anunciou para a comunidade científica que descobriu um novo Hamiltoniano para descrever a interação entre duas partículas de spin 1/2:

$$H = \lambda\sigma_1^z(\sigma_1^x)^2\sigma_2^z + i\mu\sigma_1^z\sigma_2^x\sigma_2^y$$

onde λ e μ são constantes. Mostre que isso é tudo papo furado: não há nada de novo nesse Hamiltoniano. Ele inclusive tem um nome. Você sabe qual?

4) (3 pontos) Operadores de momento angular

Considere três operadores, J_x, J_y e J_z tais que

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \qquad [J_z, J_x] = iJ_y, \qquad [J_y, J_z] = iJ_x \tag{1}$$

(Note o caráter cíclico dessas fórmulas). Quaisquer três operadores que satisfazem essas relações de comutação são denominados **operadores de momento angular**. As relações na Eq. (1) são conhecidas como *álgebra do momento angular*.

(a) Verifique que $S_x = \frac{1}{2}\sigma_x$, $S_y = \frac{1}{2}\sigma_y$, $S_z = \frac{1}{2}\sigma_z$ satisfazem a Eq. (1). Spin é uma forma de momento angular.

(b) Os operadores J_x, J_y e J_z na Eq. (1) podem ser diagonalizados simultaneamente?

(c) Considere o operador $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$. Mostre que J^2 comuta com J_x, J_y e J_z.

(d) Considere agora os operadores $J_+ = J_x + iJ_y$ e $J_- = J_x - iJ_y$. Mostre que

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \qquad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$$