Mecânica Quântica Avançada - Lista 3

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 19/03 (quinta-feira)

1) Produto Tensorial

Neste problema eu quero que você faça todos os cálculos no papel. No entanto, recomendo que você use o Mathematica para conferir suas respostas. O comando no Mathematica para calcular o produto tensorial $A \otimes B$ é `KroneckerProduct[A,B]`.

(a) Considere a matriz *unitária*

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Calcule $1 \otimes U$ e $U \otimes 1$.

(b) Verifique que $1 \otimes U$ também é unitária, onde neste caso 1 é a matriz identidade 2×2. Se convença de que isso é óbvio: se um operador tem um conjunto de propriedades no espaço vetorial de uma partícula, ele também terá essas propriedades no espaço vetorial de mais de uma partícula.

(c) O divertido do produto de Kronecker é que podemos fazer o produto de qualquer coisa com qualquer coisa. Seja[1] $|\alpha\rangle = (a, b)$. Calcule $(\langle\alpha| \otimes 1)$ e $(|\alpha\rangle \otimes 1)$, onde 1 é uma matriz identidade 3×3. Em seguida multiplique os dois. O resultado final é um objeto com qual dimensão?

2) Emaranhamento

Considere um sistema de duas partículas de spin 1/2. Dois estados possíveis são

$$|v_1\rangle = \frac{|++\rangle - |+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{3}}$$

$$|v_2\rangle = \frac{|++\rangle - |+-\rangle + |-+\rangle - |--\rangle}{2}$$

Para estes dois estados analise:

(a) Qual a probabilidade de, ao medir σ_1^z, encontrar o autovalor $+1$?

(b) Supondo que você encontrou este valor, qual o estado do sistema após a medida?

(c) Se em seguida você medir σ_2^z, qual a probabilidade de encontrar $+1$ e -1?

(d) Compare com o resultado que você teria obtido se a primeira medida (aquela do σ_1^z) não tivesse sido feita. O estado $|v_{1,2}\rangle$ é emaranhado?

3) Poço de potencial em 3D

Resolva, usando separação de variáveis, o poço de potencial infinito em 3D com Hamiltoniano

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(x, y, z)$$

sendo que $V(x, y, z) = 0$ se (x, y, z) é um ponto dentro de uma caixa cúbica de lado L, e infinito caso contrário. Discuta a degenerescência dos primeiros 3 níveis.

4) Momento angular total

Neste exercício eu quero que você demonstre que momento angular é uma grandeza *aditiva*. Ou seja, que a soma de dois momentos angulares também é um momento angular. Sejam $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ os operadores de momento angular de uma partícula e $\boldsymbol{I} = (I_x, I_y, I_z)$ os operadores de momento angular

[1] A notação $|\alpha\rangle = (a, b)$ é para ser uma abreviação de $|\alpha\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Ela não é a mesma coisa que $\langle\alpha| = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$.

de outra partícula. Cada conjunto de operadores satisfaz a álgebra do momento angular. Além disso, por se tratarem de operadores de partículas distintas, os operadores J_k comutam com os I_ℓ. Mostre que o momento angular total,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{I}$$

também satisfaz as relações de comutação do momento angular.

5) Construindo e trabalhando com matrizes do momento angular

Para este programa você pode escolher entre fazer as contas no papel ou no Mathematica. Se você fizer as contas no Mathematica, me entregue via e-mail o Notebook com os seus cálculos.

(a) Construa as matrizes de momento angular no caso em que $j = 2$. Eu quero: J_x, J_y, J_z, J_+ e J_-.

(b) Usando as suas matrizes calcule $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ e veja se seu resultado faz sentido.

(c) Verifique o teorema de Cayley-Hamilton para J_x, J_y e J_z. Ou seja, verifique que

$$\prod_{m=-j}^{j} (J_i - m) = 0$$

6) Princípio da incerteza para os operadores de momento angular

Estude o princípio da incerteza para os operadores J_x e J_y no estado $|j, m\rangle$. Ou seja, calcule $\Delta J_x \Delta J_y$. Lembre-se que, em geral

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

onde $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$. Do seu resultado, discuta os seguintes pontos, explicando-os fisicamente:

- O princípio da incerteza é satisfeito (DUH).
- A incerteza é máxima quando $m = 0$.
- O produto de incerteza é simétrico com relação a m e $-m$.
- O produto da incerteza é mínimo quando $m = \pm j$ e vale $\Delta J_x \Delta J_y = j/2$.

Lembre-se que o momento angular é um vetor e o que você está tratando são as suas componentes.