Mecânica Quântica Avançada - Lista 4

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 07/04/2015 (terça-feira)

1) Valores esperados para o átomo de H: `Lista 4 - Atomo de H.nb`

2) Evolução temporal para o átomo de H

Considere um elétron no átomo de H e suponha que em $t = 0$ seu estado inicial é

$$\Psi(\boldsymbol{r}, 0) = \frac{\psi_{2,1,1} + \psi_{2,1,-1}}{\sqrt{2}}$$

(a) Construa $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$. Simplifique o máximo que você puder.

(b) Calcule $\langle V \rangle$ neste estado.

3) Harmônicos esféricos

Dado

$$Y_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{-i\phi}$$

construa Y_2^0 e Y_2^1 aplicando L_+. Compare sua resposta com os valores tabelados (por exemplo, você pode usar a função `SphericalHarmonicsY` do Mathematica).

4) L_z como o gerador de rotações

Seja $f(\phi)$ uma função qualquer. Mostre que

$$e^{i\eta L_z} f(\phi) = f(\phi + \eta)$$

onde

$$L_z = i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Ou seja, o L_z pode ser entendido como o gerador de rotações em torno do eixo z.

5) Modelo de Schwinger

Neste problema você vai fornecer uma prova mais concreta de que no caso do momento angular orbital, os autovalores são sempre inteiros, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. Seja a o raio de Bohr (ou qualquer constante com dimensões de comprimento) e defina

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x + \frac{a^2}{\hbar}p_y\right], \qquad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[p_x - \frac{\hbar}{a^2}y\right]$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x - \frac{a^2}{\hbar}p_y\right], \qquad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[p_x + \frac{\hbar}{a^2}y\right]$$

(a) Mostre que

$$[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0$$

$$[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$$

Ou seja, esses quatro operadores funcionam exatamente como operadores de posição de partículas distintas.

(b) Mostre que

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

Escreva esta equação como $L_z = H_1 - H_2$ onde $H_{1,2}$ são Hamiltonianos de osciladores harmônicos com frequência $\omega = 1$ e massa $m = \hbar/a^2$.

(c) Os operadores H_1 e H_2 podem ser diagonalizados simultaneamente e nós sabemos as energias do oscilador harmônico, $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$, onde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Use isso para concluir que os autovalores de L_z devem ser inteiros.

6) Matriz de rotação para spin 1

Obtenha o operador de rotação $\hat{D}(R) = e^{-i\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}}$ para o caso de spin 1 na base de autoestados de $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$. Simplifique o máximo possível.

7) Conservação do momento angular

(a) Considere uma partícula sujeita a um potencial genérico $V(\boldsymbol{r})$. Mostre que

$$\frac{\mathrm{d}\langle \boldsymbol{L}\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle \boldsymbol{N}\rangle$$

onde $\boldsymbol{N}$ é o torque

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times (-\nabla V)$$

(b) Mostre que se o potencial é central então $\mathrm{d}\langle \boldsymbol{L}\rangle/\,\mathrm{d}t = 0$, que é a versão quântica da conservação do momento angular.

(c) Mostre também que, no caso de um potencial central, $H = p^2/2m + V(r)$ comuta com todas as componentes de $\boldsymbol{L}$. Ou seja, H, L^2 e L_z são todos observáveis compatíveis e podem ser diagonalizados simultaneamente.