

Mecânica Estatística - Lista 4

Professor: Gabriel T. Landi

Data de entrega: 17/05/2017

1) (2 pontos) Gás ideal ultra-relativístico

A relação entre energia e momento para uma partícula com velocidades próximas de c é $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$. No limite em que as velocidades são baixas, isso se reduz à expressão não relativística usual $E \simeq \mathbf{p}^2/2m$ (a menos de uma constante mc^2). Neste problema consideraremos o caso oposto, onde as velocidades são muito elevadas de tal forma que podemos aproximar $E \simeq c|\mathbf{p}|$. Chamamos este caso de limite ultra-relativístico. Considere uma partícula ultra-relativística conectada a um banho térmico mantido a uma temperatura T . Suponha, por pura diversão, que a partícula esta restrita a se mover em apenas duas dimensões [ou seja, o momento e a posição são vetores de duas componentes: $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ e $\mathbf{r} = (x, y)$] e seja A a área total permitida para as partículas.

- Encontre a distribuição de probabilidades da partícula quando ela estiver em equilíbrio térmico com o banho (você deverá calcular a função de partição). As variáveis \mathbf{p} e \mathbf{r} são independentes? E as variáveis p_x e p_y ? Faça um gráfico da distribuição dos momentos $P(p_x, p_y)$.
- Encontre o momento médio das partículas, $\langle |\mathbf{p}| \rangle$.
- Considere agora um sistema com N partículas ultra-relativística não interagentes. Calcule a função de partição total do sistema.
- Encontre a energia interna e a capacidade térmica deste gás.
- Mude agora para três dimensões. Recalcule a energia interna e a capacidade térmica. Calcule também a pressão exercida pelo gás nas paredes do recipiente.

2) (2, pontos) (EUF 2010-2) Gás de van der Waals

A função de partição de um gás monoatômico de N partículas interagentes pode ser escrita como:

$$Z = \left(\frac{V - Nb}{N} \right)^N \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3N/2} \exp \left(\frac{N^2 a}{Vk_B T} \right)$$

onde a e b são constantes positivas e m é a massa da partícula.

- Determine a equação de estado desse gás. Essa equação é conhecida como equação de van der Waals.
- Determine a energia interna específica $u = U/N$ do gás. Verifique que, mesmo no caso de sistemas interagentes, a energia continua sendo uma grandeza extensiva.

3) (2 pontos) (EUF 2010-1) Moléculas polares em um campo elétrico

Um gás ideal de moléculas diatômicas polares, cada uma com momento de dipolo elétrico $\boldsymbol{\mu}$, encontra-se a uma temperatura T e está sujeito a um campo elétrico \mathcal{E} . As orientações dos dipolos são definidas pelos ângulos θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) e ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) de um sistema de coordenadas esféricas cujo eixo z é paralelo ao campo elétrico. A probabilidade de encontrar uma molécula com orientação do dipolo dentro do elemento $d\theta d\phi$ vale $\rho d\theta d\phi$ onde a densidade de probabilidade $\rho(\theta, \phi)$ é dada por

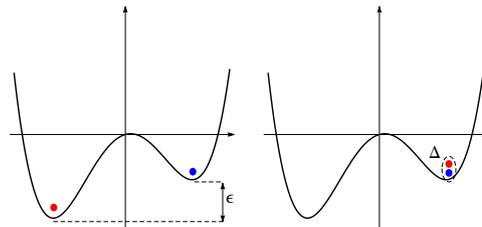
$$\rho(\theta, \phi) = \frac{1}{A} \sin \theta e^{-\beta E}$$

e está normalizada de acordo com $\int \rho(\theta, \phi) d\theta d\phi = 1$. A constante A é um fator de normalização, $\beta = 1/k_B T$ é a constante de Boltzmann e E é a energia de interação do momento de dipolo com o campo, dada por $E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}$.

- Determine A como função de T , \mathcal{E} e μ .
- O momento de dipolo médio por molécula é definido pela média $P = \mu \langle \cos \theta \rangle$. Determine P como função de T e \mathcal{E} .
- Esboce o gráfico de P versus \mathcal{E} para T constante.
- A susceptibilidade elétrica é definida por $\chi = \partial P / \partial \mathcal{E}$. Determine χ a campo nulo e mostre que ela é inversamente proporcional à temperatura T . Notar que para pequenos valores de x vale $\coth x \simeq 1/x + x/3$.

4) (2 pontos) (EUF 2012-1) Sistema com dois compartimentos

Considere um sistema formado por duas partículas distinguíveis, 1 e 2. Cada uma delas deve estar em um de dois compartimentos, A e B . A energia de uma partícula é zero quando ela se encontra no compartimento A e ϵ quando ela se encontra no compartimento B . Quando as duas partículas estão no mesmo compartimento, há um custo adicional Δ . Uma visão física desse modelo está ilustrada na figura abaixo. A diferença entre os dois níveis é ϵ e quando as duas partículas estão no mesmo sítio, existe uma repulsão entre elas e portanto a energia é acrescida de um fator Δ . Considere que o sistema está em equilíbrio com um banho térmico à temperatura T .



- Determine as possíveis configurações do sistema e suas respectivas energias.
- Calcule a função de partição Z .
- Qual a probabilidade de cada configuração?
- Calcule a energia média do sistema.
- Obtenha a entropia do sistema em termos de Z .

5) (2 pontos) (EUF 2009-2) Átomos localizados e não interagentes

Considere um sistema de N átomos localizados e não interagentes. Cada átomo pode estar em um dos três estados quânticos rotulados pelo número quântico k , com $k = -1, 0, 1$. Um átomo tem a mesma energia $\epsilon_1 > 0$ no estado $k = 1$ ou no estado $k = -1$. Um átomo no estado $k = 0$ tem energia $\epsilon_0 = 0$. Determine

- A função de partição do sistema.
- A probabilidade p_0 de um átomo se encontrar no estado com energia 0. Determine o comportamento de p_0 nos limites de altas e baixas temperaturas e esboce o gráfico de p_0 versus T .
- As expressões para a energia interna e para a entropia como função da temperatura T . Determine os valores assintóticos da energia e da entropia nos limites de altas e baixas temperaturas. A terceira lei da termodinâmica é observada?
- Esboce o gráfico da entropia como função da temperatura.