Prova 1 - 2017-1 - Gabarito

Mecânica Estatística - Primeira Prova - 07/04/2017

Professor: Gabriel T. Landi

1. (2,5 pontos) Considere uma variável aleatória N que pode tomar os valores 0 ou 1 com probabilidades $P(N=n) = Ae^{-\beta n}$ onde β é uma constante e A é um fator de normalização.

   (a) (1 ponto) Encontre A.

   (b) (1,5 pontos) Encontre $\langle N \rangle$.

2. (2,5 pontos) A distribuição de Poisson é caracterizada pela PDF $p_k = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

   (a) (1 ponto) Suponha que uma pessoa recebe, em média, 4 e-mails por hora. Usando o paradigma de Poisson, estime a probabilidade da pessoa receber menos que 3 e-mails em uma hora. Você pode deixar sua resposta em termos de exponenciais.

   (b) (1 ponto) Seja $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ com $\lambda < 1$. Calcule $\langle X! \rangle$.

   (c) (0,5 ponto) Agora suponha que $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ mas com $\lambda \gg 1$. Use o teorema central do limite para encontrar uma expressão aproximada para a PDF de $Y = X/\lambda$.

3. (2,5 pontos) Seja $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ uma normal com PDF

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

   (a) (1 ponto) Calcule a função característica $G_X(t)$. Para tal, é útil lembrar da integral Gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

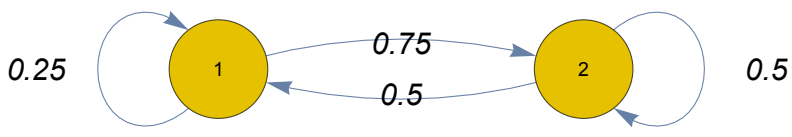
   (b) (1,5 pontos) Sejam X_1, X_2 duas variáveis iid com $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1, 2)$. Mostre que $Y = X_1 + X_2$ também é normal e encontre os parâmetros da distribuição.

4. (2,5 pontos) Considere a cadeia de Markov descrita pelo diagrama abaixo.

   (a) (1 ponto) Obtenha a matriz de transição Q.

   (b) (0,5 ponto) Suponha que o sistema começa no estado $\vec{p}(0) = (1, 0)$. Obtenha o estado do sistema no tempo $t = 2$.

   (c) (1 ponto) Calcule o estado estacionário $\vec{p}^*$.



4) $P(N=0) = A \qquad P(N=1) = A\, e^{-\beta M}$

(a) $\sum_M P(N=M) = 1 = A + A\, e^{-\beta M}$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{1 + e^{-\beta M}}$$

(b) $\langle N \rangle = \sum_M M\, P(N=M) = 0\, P(N=0) + 1\, P(N=1)$

$$\therefore \quad \langle N \rangle = \frac{e^{-\beta M}}{1 + e^{-\beta M}} = \frac{1}{e^{\beta M} + 1}.$$

Esse resultado é conhecido como dist. de Fermi-Dirac.

2) $P_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

(a) Seja X o número de emails que a pessoa recebe em 1 hora. Então $\langle X \rangle = 4$.

Se supomos que $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ então $\lambda = \langle X \rangle = 4$.

A prob. de receber menos que e-mails seca, portanto

$$P(X<4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= e^{-4}\left\{1 + 4 + \frac{4^2}{2}\right\}$$

$$= e^{-4}\{1 + 4 + 8\}$$

$$= 13\, e^{-4}$$

(b) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$\langle X! \rangle = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$$

↑ Série geométrica

(c) Se $\lambda >> 1$ podemos aplicar o teorema central do limite para supor que $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Para $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, sabemos que $\langle X \rangle = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$.

Portanto

$$\mu = \langle Y \rangle = 1$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

3) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$

(a) Eu sei que $X = \mu + \sigma Z$, onde $Z \sim N(0,1)$

$$G_Z(s) = \langle e^{isZ} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{z^2}{2} + isz \right\}$$

completando quadrados:

$$-\frac{z^2}{2} + isz = -\frac{1}{2}\left[z - 2isz \right] = -\frac{1}{2}\left[(z - is)^2 + s^2 \right]$$

$$\therefore \quad G_Z(s) = e^{-s^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{e^{-(z-is)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}_{1} = e^{-s^2/2}$$

Agora uso isso p/ calcular $G_X(s)$

$$G_X(s) = \langle e^{isX} \rangle = \langle e^{is(\mu + \sigma Z)} \rangle = e^{is\mu} \, G_Z(s\sigma)$$

$$\therefore \quad G_X(s) = \exp\left\{ is\mu - \frac{s^2\sigma^2}{2} \right\}$$

//

(b) Como X_1 e X_2 são iid

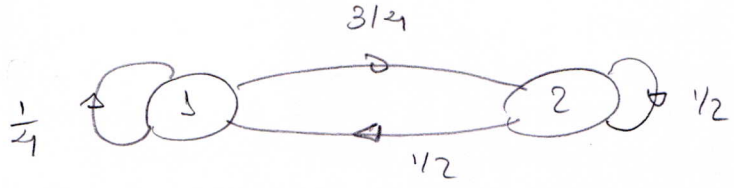
$$G_Y(s) = \langle e^{isY} \rangle = \langle e^{is(X_1 + X_2)} \rangle = \langle e^{isX_1} \rangle \langle e^{isX_2} \rangle$$

$$= \exp\left\{ is\mu_1 - \frac{s^2\sigma_1^2}{2} \right\} \exp\left\{ is\mu_2 - \frac{s^2\sigma_2^2}{2} \right\}$$

$$= \exp\left\{ is(\mu_1 + \mu_2) - \frac{s^2}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right\}$$

Essa é a função característica de uma normal com média $\mu = \mu_1 + \mu_2$ e variância $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. $\therefore \; Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

4)



(a) $Q = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{p}(2) = Q^2 \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{16} + \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} + \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

$\therefore \vec{p}(2) = \left(\frac{7}{16} , \frac{9}{16} \right)$

(c) O estado estacionário é o autovetor associado ao autovalor 1

$Q\vec{p}^* = \vec{p}^*$

$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = a$

$\therefore \frac{b}{2} = \frac{3a}{4} \rightsquigarrow b = \frac{3a}{2}$

$\vec{p}^* = \begin{pmatrix} a \\ 3a/2 \end{pmatrix}$ Agora escolha a por normalização

$a + \frac{3a}{2} = \frac{5a}{2} = 1$

$\therefore \vec{p}^* = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

//