Mecânica Estatística - Terceira Prova - 23/06/2017

Professor: Gabriel T. Landi

1. (4 pontos) A magnetização de um sistema de spins clássico é dada pela função de Langevin
$$m = \mathcal{L}\left(\frac{h_{\rm ef}}{k_B T}\right), \qquad \mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \tag{1}$$
Na presença de outros spins o campo efetivo $h_{\rm ef}$ será dado por $h_{\rm ef} = h + \lambda m$, onde h é o campo externo e λ é a constante de campo molecular de Curie-Weiss. Para este problema será útil saber a seguinte expansão em série de Taylor: $\coth(x) =\simeq (1/x) + x/3 - x^3/45$.

   (a) Considere o caso $h = 0$. Calcule a temperatura crítica T_c da transição entre o estado paramagnético e o estado ferromagnético.

   (b) Obtenha uma expressão para a magnetização na vizinhança de T_c para $h = 0$.

2. (4 pontos) Considere um gás de elétrons em *duas dimensões*, confinado em uma região de área A, com relação de dispersão $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

   (a) Mostre que, pare este problema, a densidade de estados $D(\epsilon)$ não depende de ϵ.

   (b) Calcule a energia de Fermi ϵ_F.

   (c) Calcule a energia do estado fundamental. Expresse seu resultado em termos de ϵ_F.

3. (2 pontos) Magnons são excitações que ocorrem em cristais magnéticos e que, em muitos aspectos, se assemelham aos fótons em uma cavidade. A diferença é que a relação de dispersão dos magnons é dada por $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Consequentemente, a densidade de estados será
$$D(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\epsilon}$$
A energia interna à temperatura T é dada por
$$U = \sum_{\boldsymbol{k}} \epsilon_k \bar{n}_k, \qquad \bar{n}_k = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k} - 1}$$
Mostre que o calor específico depende da temperatura na forma $c \propto T^\alpha$ e calcule α (você não precisa se preocupar com os pre-fatores. Basta analisar a dependência com a temperatura).

Prova 3 - Gabarito

1) $m = \mathcal{L}\left(\frac{h_{ef}}{k_B T}\right)$ $\qquad \mathcal{L} = \coth(x) - \frac{1}{x}$

Para $h = 0$: $\qquad m = \mathcal{L}\left(\frac{\lambda m}{k_B T}\right)$

Próximo do ponto crítico m será pequeno e portanto posso expandir

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

$$\simeq \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}$$

Assim, obtemos

$$m \simeq \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda m}{k_B T}\right) - \frac{1}{45}\left(\frac{\lambda m}{k_B T}\right)^3$$

$$\frac{1}{45}\left(\frac{\lambda}{k_B T}\right)^3 m^2 = \frac{\lambda}{3 k_B T} - 1$$

$$m = \sqrt{45}\left(\frac{k_B T}{\lambda}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{\lambda}{3 k_B T} - 1}$$

(a) Vemos que haverá uma solução real enquanto

$$\frac{\lambda}{3k_BT} > 1$$

Isso define a temperatura crítica

$$\boxed{k_BT_c = \frac{\lambda}{3}}$$

(b) Já calculei:

$$m = \sqrt{45}\left(\frac{k_BT}{\lambda}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{\lambda}{3k_BT} - 1}$$

$$= \sqrt{45}\left(\frac{T}{3T_c}\right)^{3/2}\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)^{1/2}$$

Note que $m \sim (T_c - T)^{1/2}$, como esperado da teoria de campo médio.

2) (a) A densidade de estados é definida pela relação

$$\sum_{k\sigma} f(\epsilon_k) = \int d\epsilon \, D(\epsilon) f(\epsilon)$$

Temos

$$\sum_{k\sigma} f(\epsilon_k) = 2 \sum_{k} f(\epsilon_k) = 2 \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2k \, f(\epsilon_k)$$

$$d^2k = k \, dk \, d\theta$$

$$\sum_{k\sigma} f(\epsilon_k) = 2 \frac{A}{(2\pi)^2} 2\pi \int dk \, k \, f(\epsilon_k)$$

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$d\epsilon = \frac{\hbar^2}{m} k \, dk$$

$$\sum_{k\sigma} f(\epsilon_k) = 2 \frac{A}{(2\pi)^2} 2\pi \frac{m}{\hbar^2} \int d\epsilon \, f(\epsilon)$$

Portanto a densidade de estados será

$$D(\epsilon) = \frac{A}{\pi} \frac{m}{\hbar^2}$$

independente de ϵ.

(b) A energia de Fermi pode ser calculada de (pelo menos) duas maneiras

Método 1: círculo de área πk_F^2 deve conter $\frac{N}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ pontos

$$\pi k_F^2 = \frac{N}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$$

$$k_F = \sqrt{2\pi N/A}$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} 2\pi N/A$$

Método 2: $\displaystyle\int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon)\, d\epsilon = N$

$$\| $$

$$\frac{A}{\pi}\frac{m}{\hbar^2}\epsilon_F = N \quad \rightsquigarrow \quad \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{m}\pi N/A$$

(c) $$U = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon\, \epsilon\, D(\epsilon) = \underbrace{\frac{A}{\pi}\frac{m}{\hbar^2}}_{\frac{N}{\epsilon_F}} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon\, \epsilon = \frac{N}{\epsilon_F}\frac{\epsilon_F^2}{2}$$

$$\therefore \quad U = N\frac{\epsilon_F}{2}$$

Como a densidade de estados é plana, a energia por elétron U/N é simplesmente $\epsilon_F/2$.

3) $U = \sum_k \epsilon_k \bar{n}_k = \int d\epsilon \, \epsilon \, \bar{n}(\epsilon) \, D(\epsilon)$

$$= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty d\epsilon \, \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta\epsilon}-1}$$

Defino $x = \beta \epsilon$.

$$dx = \beta \, d\epsilon$$

$$d\epsilon \, \epsilon^{3/2} = \frac{dx}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{3/2}$$

$$U = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{1}{\beta^{5/2}} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}$$

A integral resultante é somente uma constante.

$\therefore \quad U \sim T^{5/2} \rightsquigarrow \underline{C \sim T^{3/2}} \, //$