Apêndice F

Equações das Cônicas

As equações da elipse, da parábola e da hipérbole em coordenadas polares planas são revisadas neste apêndice.

F.1 Elipse

Uma *elipse* é definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois focos fixos é constante, isto é, $r + r' = 2\,a$, onde a é o semieixo maior da elipse, r e r' são, respectivamente, as distâncias dos pontos da elipse aos seus focos F e F', como ilustrado na Fig. F.1. O semieixo menor está relacionado ao semieixo maior pela equação

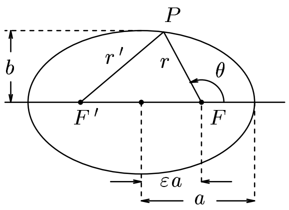

Fig. F.1: *Elipse.*

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

onde ε é a *excentricidade* da elipse e é *menor que* 1. A origem de um sistema de referência será fixada num dos focos e a direção polar será escolhida como sendo a do semieixo maior com o sentido dirigido para o ponto da elipse mais próximo ao foco, como mostra a Fig. F.1. Pela figura, é evidente que $\overrightarrow{F'P} = \overrightarrow{FP} - \overrightarrow{FF'}$. Como $|\overrightarrow{F'P}| = r'$, $|\overrightarrow{FP}| = r$ e $|\overrightarrow{FF'}| = 2\,\varepsilon\,a$, obtém-se

$$r'^2 = r^2 + 4\,\varepsilon^2\,a^2 - 2\,\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FF'} = r^2 + 4\,\varepsilon^2\,a^2 - 4\,\varepsilon\,a\,r\,\cos(\pi-\theta)\,,$$

ou seja,

$$r'^2 = r^2 + 4\,\varepsilon^2\,a^2 + 4\,\varepsilon\,a\,r\,\cos\theta\,.$$

Por outro lado, pela definição da elipse, tem-se

$$r'^2 = r^2 - 4\,a\,r + 4\,a^2\,.$$

Comparando-se as duas equações e após alguns rearranjos algébricos chega-se a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}\cos\theta\,, \tag{F.1}$$

que é a equação da elipse em coordenadas polares. Escrito na forma inversa, essa mesma equação é

$$r = a\,\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\,\cos\theta}\,. \tag{F.2}$$

Observe que se $\varepsilon = 0$ tem-se

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\,, \qquad \text{isto é,} \qquad r = a\,,$$

que é a equação de uma circunferência de raio a. Isto quer dizer que, no limite quando $\varepsilon \to 0$, a elipse torna-se uma circunferência.

F.2 Parábola

Uma *parábola* é definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes a um foco F e a uma reta geratriz que dista a de F. Fixando-se a origem do sistema de referência no foco da parábola e a direção polar como sendo a direção da distância perpendicular do foco à geratriz, tem-se

$$r + r\,\cos\theta = a\,, \qquad \text{ou} \qquad r(1+\cos\theta) = a\,,$$

onde r e θ estão mostrados na Fig. F.2. Portanto, a equação da parábola em coordenadas polares é dada por

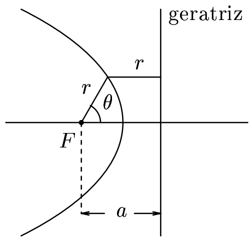

Fig. F.2: *Parábola.*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\,\cos\theta \tag{F.3}$$

ou na forma inversa desta por

$$r = a\,\frac{1}{1+\cos\theta}\,. \tag{F.4}$$

F.3 Hipérbole

Uma *hipérbole* é definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois focos fixos é constante. Essa diferença das distâncias pode ser tanto positiva como negativa. Assim, uma hipérbole possui dois *ramos*, como mostra a Fig. F.3 na página 221. A origem de um sistema de coordenadas polares será fixada num dos focos e a direção polar tomada como sendo aquela que une o primeiro ao segundo foco.

O *ramo* (+) da hipérbole é definida como $r' - r = 2\,a$, sendo $2\,a$ a distância mais próxima entre os dois ramos dessa hipérbole, r e r' distâncias do seu ponto aos dois focos, conforme Fig.F.3. É evidente pela figura que $\overrightarrow{F'P} = \overrightarrow{FP} - \overrightarrow{FF'}$, o que resulta em

$$r'^2 = r^2 + 4\,\varepsilon^2\,a^2 - 2\,\big|\overrightarrow{FP}\big| \cdot \big|\overrightarrow{FF'}\big| = r^2 + 4\,\varepsilon^2\,a^2 - 4\,\varepsilon\,a\,r\,\cos\theta\,,$$

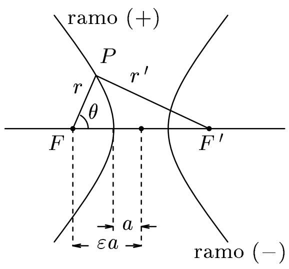

Fig. F.3: *Hipérbole.*

onde foi considerado o fato que $\left|\overrightarrow{F'P}\right| = r'$, $\left|\overrightarrow{FP}\right| = r$ e $\left|\overrightarrow{FF'}\right| = 2\,\varepsilon\, a$ com $\varepsilon > 1$. Mas, pela definição do ramo $(+)$ da hipérbole, obtém-se

$$r'^{\,2} = r^2 + 4\,a\,r + 4\,a^2\,.$$

Igualando-se esta equação com a anterior e procedendo as simplificações algébricas necessárias chega-se, finalmente, à equação do ramo $(+)$ da hipérbole em coordenadas polares dada por

$$ramo\,(+)\;:\qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{a(\varepsilon^2-1)} + \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2-1)}\,\cos\theta\,, \tag{F.5}$$

ou na forma inversa dada por

$$r = a\,\frac{\varepsilon^2-1}{1+\varepsilon\,\cos\theta}\,. \tag{F.6}$$

Procedendo-se de forma semelhante no mesmo sistema de coordenadas da Fig. F.3, obtém-se a equação polar do *ramo* $(-)$ da hipérbole, definida como $r' - r = -\,2\,a$, dada por

$$ramo\,(-)\;:\qquad \frac{1}{r} = \frac{-\,1}{a(\varepsilon^2-1)} + \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2-1)}\,\cos\theta\,, \tag{F.7}$$

ou na forma inversa,

$$r = a\,\frac{\varepsilon^2-1}{-\,1+\varepsilon\,\cos\theta}\,. \tag{F.8}$$

F.4 Identificação da Equação das Cônicas

Todas as equações das cônicas obtidas nas seções anteriores têm uma forma genérica comum que é

$$\frac{1}{r} = A + B\,\cos\theta\,,\qquad\qquad B > 0\,. \tag{F.9}$$

A identificação de qual das cônicas a equação (F.9) descreve é feita analisando-se a relação entre os coeficientes A e B como segue:

- Se $A > B$, a equação (F.9) representa uma elipse. Os parâmetros da elipse são dadas por:

$$\varepsilon = \frac{B}{A}\,,$$

$$a = \frac{A}{A^2 - B^2}\,.$$

- Se $A = B$, a equação (F.9) representa uma parábola, tendo

$$a = \frac{1}{A} = \frac{1}{B} .$$

- Se $0 < A < B$, a equação (F.9) representa o ramo $(+)$ de uma hipérbole, cujos parâmetros são obtidos de

$$\varepsilon = \frac{B}{A} ,$$

$$a = \frac{A}{B^2 - A^2} .$$

- Se $-B < A < 0$, o ramo $(-)$ de uma hipérbole é representado pela equação (F.9) e os parâmetros são dados por

$$\varepsilon = \frac{B}{-A} ,$$

$$a = \frac{-A}{B^2 - A^2} .$$