# PGF5110 - Estado Sólido I

**Lista de exercícios 1 - 2s/2017 (entrega em 15/09/2017)**

**1. Modelo de Drude** - O modelo de Drude assume que os elétrons em metais se comportam como partículas clássicas (que obedecem às Leis de Newton) que sofrem colisões elásticas instantâneas. A hipótese central do modelo é que a probabilidade de o elétron sofrer uma colisão em um intervalo infinitesimal $\delta t$ independende da história anterior do elétron e é dada simplesmente por $\delta t/\tau$ onde $\tau$ é o chamado *tempo de relaxação.* O tempo de relaxação é o único parâmetro livre.

Esta hipótese (que não é trivial) tem algumas consequências que vamos explorar a seguir.

(a) Considere um elétron escolhido aleatoriamente que sofreu uma colisão no instante $t = 0$. Mostre que a probabilidade deste elétron *não sofrer* colisões $t$ segundos depois é $e^{-t/\tau}$.

Dica: lembre que a probabilidade de algo *não ocorrer* é $(1 - P_{\text{ocorrer}})$ e que $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

(b) Mostre que uma consequência direta do resultado do item (a) é que a média sobre todos os elétrons dos tempos decorridos após a última colisão (ou do tempo que falta até a próxima colisão) é $\tau$. (lembre-se da normalização!)

(c) Mostre (usando argumentos de probabilidade) que, para um mesmo elétron, a probabilidade de o intervalo de tempo entre duas colisões sucessivas estar entre $t$ e $t + \delta t$ é $\frac{\delta t}{\tau}e^{-t/\tau}$

(d) Mostre que o tempo médio entre duas colisões sofridas por um mesmo elétron ao longo da sua trajetória (média sobre em um tempo longo) também (!) é $\tau$.

**2. Modelo de Drude II** Consideremos agora que os elétrons (massa m* e carga $-e$) estão sob a ação de um campo elétrico $\boldsymbol{E}$ e são descritos pelo modelo de Drude (tempo de relaxação $\tau$). Se $n$ é a densidade de elétrons por volume e $\langle \boldsymbol{v}\rangle$ é a velocidade média dos elétrons, a densidade de corrente será dada por $\boldsymbol{J} = -ne\langle \boldsymbol{v}\rangle$. A *condutividade elétrica* $\sigma$ é definida pela relação $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$.

(a) Calcule a variação da velocidade média $\delta\langle \boldsymbol{v}\rangle$ dos elétrons que *não sofrem colisões* em um intervalo de tempo $\delta t$.

(b) Assumindo que a velocidade média dos elétrons que sofreram colisões entre $t$ e $t + \delta t$ é zero, calcule $\langle \boldsymbol{v}\rangle(t + \delta t)$ (a velocidade média sobre todos os elétrons no instante $t + \delta t$) em termos de $\langle \boldsymbol{v}\rangle(t)$ e de outros parâmetros do modelo.

(c) Tomando o limite $\delta t \to 0$, mostre que:

$$\frac{d\langle \boldsymbol{v}\rangle}{dt} = -\frac{\langle \boldsymbol{v}\rangle(t)}{\tau} + \frac{(-e)\boldsymbol{E}}{m^*}$$

(d) Mostre que a solução estacionária leva a uma condutividade dada por $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*}$.

**3. Condutividade no modelo de Sommerfeld** Mostre agora que o cálculo da condutividade pelo modelo de Sommerfeld também fornece *o mesmo valor* do modelo de Drude: $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*}$.

(a) Use a aproximação de tempo de relaxação e mostre que o efeito de uma força $\boldsymbol{F}$ em cada elétron equivale a que o sistema adquira um $\boldsymbol{k}$ médio não-nulo dado por $\langle \boldsymbol{k}_0\rangle_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{F}\tau/\hbar$ e que isto equivale a deslocar o centro da superfície de Fermi para $\langle \boldsymbol{k}_0\rangle_{\boldsymbol{k}}$. Dica: lembre que $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$

(b) Mostre que isto leva a uma densidade de corrente na direção da força dada por $J = \frac{-ne\hbar}{m^*}\langle \boldsymbol{k}_0\rangle_k$

(c) Calcule $\langle \boldsymbol{k}_0\rangle_k$, lembrando que a média pode ser tomada somando sobre os estados $\langle ...\rangle_k = (2/N)\sum_k(...)$.

(d) Escrevendo $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$, calcule a condutividade.

**4. Gás de elétrons em 2D** Usando a densidade de estados do gás de elétrons em 2D (que você calculou na Tarefa 2), calcule as seguintes quantidades em função da temperatura $T$:

(a) O potencial químico $\mu(T)$.

(b) A densidade de energia $u(T)$.

(c) A capacidade calorífica $C_v = \frac{\partial u}{\partial T}$ .

**5. Redes em 2D**

(a) Mostre que a célula de Wigner-Seitz (primeira Zona de Brillouin, 1ZB) de uma rede quadrada é um quadrado e que, no caso geral de uma rede 2D, é um hexágono ou um retângulo.

(b) Definimos a 2a zona de Brillouin (2ZB) como o conjunto de pontos que estão mais próximos ao ponto da rede do que de seus segundos vizinhos mas que não pertencem à 1ZB (ou seja, estão mais próximos dos 1os vizinhos do que do ponto de referência). Mostre que a 2ZB de uma rede quadrada é formada por um conjunto desconexo de triângulos isósceles (se quiser, desenhe em um papel quadriculado para facilitar!).

Dica: Veja a Fig. 3.4(a) do livro.