

PGF5295 - Teoria Quântica de Muitos Corpos em Matéria Condensada

Lista de exercícios 1 - 1s/2013 (entrega em 09/04/2013)

1. Considere o oscilador harmônico quântico em 1D ($H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$) e os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger definidos em termos de \hat{x} e \hat{p} como:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p} \right)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p} \right)$$

(a) Mostre que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ e que $[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$.

(b) Mostre que $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ comuta com H .

(c) Mostre que, se $\hat{N}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ então λ é um número inteiro positivo. Sugestão: mostre que $\hat{a}|\lambda\rangle$ também é autoestado de \hat{N} e que $\hat{a}|0\rangle = 0$.

(d) Se $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, mostre que $|n\rangle \propto (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ onde $|0\rangle$ é tal que $\hat{a}|0\rangle = 0$.

(e) Mostre que:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

(f) Mostre que: $\hat{a}\hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{p-1} |0\rangle = p (\hat{a}^\dagger)^{p-1} |0\rangle$.

2. Considere uma partícula bosônica em 1D descrita pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_0 (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

onde $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ e ω e ω_0 são constantes positivas.

(a) Diagonalize H e encontre as auto-energias. Sugestão: introduza um operador $\hat{\alpha} = \hat{a} + \omega_0/\omega$

(b) Discuta a origem física do segundo termo de H , comparando com o oscilador harmônico simples.

3. Estados coerentes bosônicos são auto-estados de operadores de aniquilação bosônicos. O exemplo mais simples são os e.c. do oscilador harmônico.

Considere um estado escrito na base $\{|n\rangle\}$ de estados do oscilador harmônico na forma

$$|\phi\rangle = \sum_n \phi(n) |n\rangle$$

(a) Mostre que, se $\hat{a}|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$, então

$$\phi(n) = \frac{\phi^n}{\sqrt{n!}}$$

(b) Mostre que $|\phi\rangle = e^{\phi\hat{a}^\dagger} |0\rangle$.

(c) Mostre que $\langle\phi|\phi'\rangle = e^{\phi^*\phi'}$ (ou seja, a base não é ortonormal).

(d) Mostre que a relação de completudeza da base de estados coerentes é dada por:

$$\mathbf{1} = \frac{1}{\pi} \int d(\text{Re}(\phi)) d(\text{Im}(\phi)) e^{-\phi^*\phi} |\phi\rangle\langle\phi|$$

(a base é “super-completa”).

4. Modelos “solúveis”: Considere o Hamiltoniano:

$$H = \sum_{i,j} \hat{a}_i^\dagger h_{ij} \hat{a}_j$$

onde \hat{a}_i^\dagger são operadores de criação bosônicos ou fermiônicos ($\hat{a}_i^\dagger|0\rangle = |i\rangle$) e $h_{ij} = \langle i|H|j\rangle$.

Mostre que *sempre* existe uma matriz unitária \mathbf{U} tal que $\hat{b}_i = \sum_j U_{ij} \hat{a}_j$ de modo que

$$H = \sum_i \epsilon_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

onde os $\{\epsilon_i\}$ são as auto-energias de H .

5. Transformação de Bogoliubov para Férmions Considere o Hamiltoniano:

$$H = E_0 (\hat{c}^\dagger \hat{c} + \hat{d}^\dagger \hat{d}) + E_1 (\hat{c}^\dagger \hat{d}^\dagger + \hat{d} \hat{c})$$

onde c e d são operadores fermiônicos. Para resolver problemas desse tipo, introduzimos a chamada *transformação de Bogoliubov*:

$$\hat{c} = u\hat{f} - v\hat{g}^\dagger$$

$$\hat{d} = u\hat{g} + v\hat{f}^\dagger$$

onde \hat{f} e \hat{g} também são operadores fermiônicos e u, v são números reais.

(a) Mostre que $u^2 + v^2 = 1$. Sugestão: use as relações de anti-comutação dos operadores.

(b) Mostre que, impondo $E_1(u^2 - v^2) - 2uvE_0 = 0$, o Hamiltoniano será escrito na forma diagonal

$$H = \sqrt{E_0^2 + E_1^2} (\hat{f}^\dagger \hat{f} + \hat{g}^\dagger \hat{g}) + \text{const.}$$