PGF5295 - Teoria Quântica de Muitos Corpos em Matéria Condensada

Lista de exercícios 4 - 1s/2013 (entrega em 13/06/2013)

1. Revisão de Variáveis Complexas II Mostre que a função degrau pode ser representada na forma:

$$\theta(t-t') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\eta} \ .$$

Sugestão: faça a integral no plano complexo $z = \omega + ib$, escolhendo o contorno adequado.

2. Considere o efeito de interação elétron-elétron no gás de elétrons (modelo de "Jellium").

$$\hat{U}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \frac{\Psi^\dagger_{\sigma_1}(\mathbf{r})\Psi^\dagger_{\sigma_2}(\mathbf{r}')\Psi_{\sigma_2}(\mathbf{r}')\Psi_{\sigma_1}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \ ,$$

onde $\Psi^\dagger_{\sigma_i}(\mathbf{r})$ e $\Psi_{\sigma_i}(\mathbf{r})$ são operadores de campo (soma sobre os índices de spin repetidos σ_i).

(a) Calcule a expressão para o potencial no espaço de momentos $\hat{U}(\mathbf{q})$ em termos de operadores de criação/destruição $c^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}$ ($c_{\mathbf{k},\sigma}$) de elétrons com momento $\mathbf{k}$ e spin σ.

(b) Mostre que, até 1^a ordem no parâmetro adimensional r_s, a energia por partícula é dada por:

$$\frac{E^{(0)}+E^{(1)}}{N} = \frac{2.21}{r_s^2} - \frac{0.916}{r_s} \text{ Ryd} \ .$$

Sugestão: Calcule a correção em 1a ordem $\langle \hat{U}(\mathbf{q})\rangle_0$ para o estado fundamental do gás de elétrons. Considere os diferentes processos que contribuem (desenhe os diagramas de Feynman correspondentes). Argumente que uma das contribuições é cancelada pelo background positivo dos íons (por quê?) e calcule a contribuição do outro processo para a energia.

(c) Considere agora a correção de *segunda ordem*. Mostre que a contribuição para a energia é dada por

$$\frac{E^{(2)}}{N} = (\epsilon_d + \epsilon_x) \text{ Ryd} \ ,$$

onde

$$\epsilon_d = \frac{-3}{8\pi^5}\int \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{\bar{q}^4}\int_{|\bar{\mathbf{k}}+\bar{\mathbf{q}}|>1} d\bar{\mathbf{k}} \int_{|\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{q}}|>1} d\bar{\mathbf{p}} \frac{\theta(1-\bar{k})\theta(1-\bar{p})}{\bar{\mathbf{q}}\cdot(\bar{\mathbf{q}}+\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{k}})} \ ,$$

$$\epsilon_x = \frac{3}{16\pi^5}\int \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{\bar{q}^2}\int_{|\bar{\mathbf{k}}+\bar{\mathbf{q}}|>1} d\bar{\mathbf{k}} \int_{|\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{q}}|>1} d\bar{\mathbf{p}} \frac{\theta(1-\bar{k})\theta(1-\bar{p})}{[\bar{\mathbf{q}}\cdot(\bar{\mathbf{q}}+\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{k}})]\ |\bar{\mathbf{q}}+\bar{\mathbf{p}}+\bar{\mathbf{k}}|^2} \ .$$

(os momentos nas integrais estão reescalonados em unidades de k_F: $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k_F$, etc.)

(d) Alguma dessas contribuições de 2a ordem (ϵ_d, ϵ_x) diverge? Justifique!

3. Considere a polarizibilidade do gás de elétrons em ordem zero:

$$\Pi^{(0)}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}}) = -2i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathcal{G}^{(0)}(p+q)\mathcal{G}^{(0)}(p)$$

sendo $p = (\mathbf{p},\omega_{\mathbf{p}})$ e $q = (\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}})$ quadri-momentos ($d^4p = d^3\mathbf{p}d\omega_{\mathbf{p}}$).

Usando a expressão do propagador livre $\mathcal{G}^{(0)}(p)$ (derivada em sala), mostre que

$$\Pi^{(0)}(\mathbf{q},\omega_{\mathbf{q}}) = -2\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\theta(k_F-|\mathbf{p}|)\theta(|\mathbf{p}+\mathbf{q}|-k_F)}{\omega_{\mathbf{q}}+\epsilon_{|\mathbf{p}|}-\epsilon_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}+i\eta}$$
$$+2\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\theta(|\mathbf{p}|-k_F)\theta(k_F-|\mathbf{p}+\mathbf{q}|)}{\omega_{\mathbf{q}}+\epsilon_{|\mathbf{p}|}-\epsilon_{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}-i\eta}$$