

Funções de Green

1

"Função de Green" é um termo genérico e precisamos sempre ter em mente de qual função de Green estamos falando. Isso porque diferentes equações diferenciais levam a "funções de Green" distintas.

Por exemplo, o primeiro contato de um estudante de Física com função de Green provavelmente se dá no contexto de eletromag:

$$\text{Eq. de Poisson: } \nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e(\vec{r})$$

potencial elétrico distribuição de carga

a qual está associada a eq. equivalente para função de Green:

$$\nabla^2 G(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad (\dots) \quad \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int d\vec{r}' G(\vec{r}-\vec{r}') \rho_e(\vec{r}')$$

os mesmos (sujeito a condições de contorno) (verifique aplicando ∇^2)

Encontrada a função de Green (dadas as condições de contorno), o potencial é obtido para qualquer distribuição de carga. Por exemplo,

no caso "sem bordas", podemos escrever $G(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} G(k)$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 G(\vec{r}) &= \int (-k^2 G(k)) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \delta(\vec{r}) &= \int (1) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^3} d^3k \end{aligned} \right\} -k^2 G(k) = 1 \Rightarrow G(k) = -\frac{1}{k^2}$$

Logo $G(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(-\frac{1}{k^2}\right) = (\dots) = -\frac{1}{4\pi r}$ //

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{r}' \frac{\rho_e(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{que é o resultado usual.}$$

Nesse curso estamos interessados nas funções de Green relativas à Equação de Schrödinger, tanto de partícula-única como do muitos-corpos, dependente do tempo ou não.

Comecemos com a função de Green de partícula única independente do tempo no caso da Eq. de Schrödinger na forma:

$$\hat{H} \Psi_E(\vec{r}) = (\hat{H}_0(\vec{r}) + \hat{V}(\vec{r})) \Psi_E(\vec{r}) = E \Psi_E(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{(\hat{E} - \hat{H}) \Psi_E(\vec{r}) = 0}$$

A função de Green relacionada ao operador diferencial $(E - \hat{H})$ será:

$$(E - \hat{H}) G(\vec{r}, \vec{r}'; E) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Note que podemos também definir a função de Green $G_0(r, r', E)$:

$$\boxed{(E - \hat{H}_0(\vec{r})) G_0(\vec{r}, \vec{r}'; E) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')}$$

relacionada à eq $(E - H_0) \Psi_E^0(\vec{r}) = 0$. Note que podemos escrever

$$\boxed{G_0^{-1}(\vec{r}, \vec{r}'; E) = (E - \hat{H}_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \quad \text{ou} \quad \boxed{G_0^{-1}(\vec{r}, E) = (E - \hat{H}_0)}$$

uma vez que $\int d\vec{r}'' G_0^{-1}(r, r'') G_0(r'', r') = \delta(r - r')$

$$\boxed{G_0^{-1}(\vec{r}, E) \Psi_E^0(\vec{r}) = 0}$$

$$\boxed{\int d\vec{r}'' \langle \vec{r} | G^{-1}(\vec{r}, \vec{r}'') \langle \vec{r}'' | G_0 | \vec{r}' \rangle = \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle}$$

Com isso, temos:

$$(E - \hat{H}_0 - V(\vec{r})) \Psi_E(\vec{r}) = 0 \Rightarrow (G_0^{-1}(\vec{r}, E) - V(\vec{r})) \Psi_E(\vec{r}) = 0$$

No espírito da Representação de Interacção, podemos mostrar que $\Psi_E(\vec{r})$ e $\Psi_E^0(\vec{r})$ estão relacionados por:

$$\boxed{\Psi_E(\vec{r}) = \Psi_E^0(\vec{r}) + \int d\vec{r}' G_0(\vec{r}, \vec{r}'; E) V(\vec{r}') \Psi_E(\vec{r}')} \quad \leftarrow$$

Prova:

$$\begin{aligned}
& (G_0^{-1}(\vec{r}, E) + V(\vec{r})) (\Psi_E^0(\vec{r}) + \int d\vec{r}' G_0(\vec{r}, \vec{r}', E) V(\vec{r}') \Psi_E(\vec{r}')) = \\
& = \left(\overset{\text{zero}}{G_0^{-1}(\vec{r}, E) \Psi_E^0(\vec{r})} - V(\vec{r}) \Psi_E^0(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \underbrace{G_0^{-1}(\vec{r}, E) G_0(\vec{r}, \vec{r}', E)}_{\delta(\vec{r}-\vec{r}')} V(\vec{r}') \Psi_E(\vec{r}') \right. \\
& \quad \left. - \int d\vec{r}' V(\vec{r}) G_0(\vec{r}, \vec{r}', E) V(\vec{r}') \Psi_E(\vec{r}') \right) \\
& = V(\vec{r}) (\Psi_E(\vec{r}) - \Psi_E^0(\vec{r})) - V(\vec{r}) \int d\vec{r}' G_0(\vec{r}, \vec{r}', E) V(\vec{r}') \Psi_E(\vec{r}') = 0
\end{aligned}$$

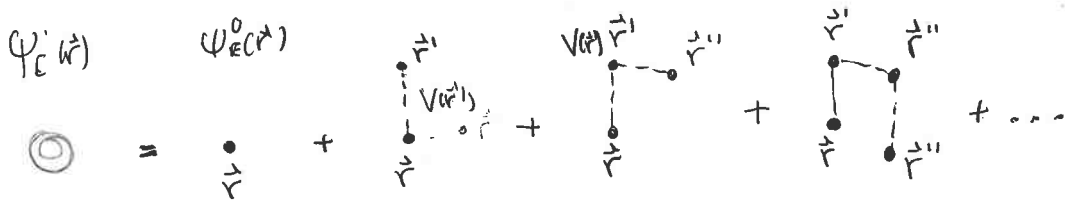
C.Q.D.

Assim, conhecidos $\Psi_E^0(\vec{r})$ e $G_0(\vec{r}, \vec{r}', E)$ ($H_0 \rightarrow$ "resolvido")

podemos expandir $\Psi_E(\vec{r})$ na forma:

$$\begin{aligned}
\Psi_E(\vec{r}) = & \Psi_E^0(\vec{r}) + \int d\vec{r}' G_0(\vec{r}, \vec{r}', E) V(\vec{r}') \Psi_E^0(\vec{r}') + \quad \textcircled{\theta(V)} \\
& + \int d\vec{r}' d\vec{r}'' G_0(\vec{r}, \vec{r}', E) V(\vec{r}') G_0(\vec{r}', \vec{r}'', E) V(\vec{r}'') \Psi_E^0(\vec{r}'') \quad \textcircled{\theta(V^2)} \\
& + \int d\vec{r}' d\vec{r}'' d\vec{r}''' G_0(\vec{r}, \vec{r}', E) V(\vec{r}') G_0(\vec{r}', \vec{r}'', E) V(\vec{r}'') G_0(\vec{r}'', \vec{r}''', E) V(\vec{r}''') \Psi_E^0(\vec{r}''') \quad \textcircled{\theta(V^3)} \\
& + \dots
\end{aligned}$$

ou, "diagrammaticamente" + ...



Pictoriamente, podemos escrever:

$$\Psi_E = \Psi_E^0 + G_0 V \Psi_E^0 + G_0 V G_0 V \Psi_E^0 + G_0 V G_0 V G_0 V \Psi_E^0 + \dots$$

$$\Psi_E = \Psi_E^0 + (G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots) V \Psi_E^0 \quad (I)$$

onde cada $G_0 V$ "carrega", implicitamente, uma integral $\int dr' G_0(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \dots$

Escrevendo a eq formal para Ψ_E nessa forma, temos

$$\underline{\Psi_E = \Psi_E^0 + G_0 V \Psi_E}$$

No entanto, podemos escrever também,

$$\boxed{\Psi_E = \Psi_E^0 + G V \Psi_E^0} \quad (II) \text{ ou } \underline{\Psi_E(\vec{r}) = \Psi_E^0(\vec{r}) + \int dr' G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \Psi_E^0(\vec{r}')}$$

que é solução de $(E - H) \Psi_E = 0$

Prova "pictórica" (lembrar das integrais implícitas)

Definição:

$$\begin{cases} (E - H) \Psi_E = 0 \Rightarrow G^{-1} \Psi_E = 0 \Rightarrow \underline{G^{-1} = E - H = (E - H_0) - V = G_0^{-1} - V} \\ (E - H_0) \Psi_E^0 = 0 \Rightarrow G_0^{-1} \Psi_E^0 = 0 \end{cases}$$

logo:

$$\begin{aligned} G^{-1} \Psi_E &= G^{-1} (\Psi_E^0 + G V \Psi_E^0) = G^{-1} \Psi_E^0 + V \Psi_E^0 = (G_0^{-1} - V) \Psi_E^0 + V \Psi_E^0 \\ &= \underbrace{G_0^{-1} \Psi_E^0}_{\text{zero}} - V \Psi_E^0 + V \Psi_E^0 = 0 \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Comparando as soluções (I) e (II)

$$\left. \begin{aligned} \Psi_E &= \Psi_E^0 + (G_0 + G_0 V G_0 + \dots) V \Psi_E^0 \\ \Psi_E &= \Psi_E^0 + \underline{G} V \Psi_E^0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots$$

$$= G_0 + G_0 V (G_0 + G_0 V G_0 + \dots)$$

$$\boxed{G = G_0 + G_0 V G}$$

Eq. de Dyson

Resultados similares podem ser obtidos no caso da Eq. de Schrödinger dependente do tempo: ($\hbar=1$)

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - H \right] \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (H = H_0 + V)$$

para $V=0$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right] \Psi^0(\vec{r}, t) = 0$$

As funções de Green desses operadores satisfazem o seguinte:

$$\begin{cases} \left[i \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right] G_0(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \\ \left[i \frac{\partial}{\partial t} - H_0 - V(\vec{r}) \right] G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} G_0^{-1}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_0(\vec{r}) \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \\ G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \end{cases}$$

$$\left[\text{uma vez que } \int G^{-1}(\vec{r}, t; \vec{r}'', t'') G(\vec{r}'', t''; \vec{r}', t') d\vec{r}'' dt'' = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \right]$$

E tomar estes, as soluções

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi^0(\vec{r}, t) + \int d\vec{r}' dt' \underline{G_0(\vec{r}, t; \vec{r}', t')} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}', t')$$

ou, equivalentemente,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi^0(\vec{r}, t) + \int d\vec{r}' dt' \underline{G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')} V(\vec{r}') \Psi(\vec{r}', t')$$

onde tb vale a eq de Dyson (integrar em $\int d\vec{r}' dt'$...) \rightarrow

$$G = G_0 + G_0 V G$$

A função de Green $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ é muitas vezes chamada de propagador uma vez que pode ser vista como um operador que atua em $\Psi(\vec{r}', t')$ na forma:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r}' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \Psi(\vec{r}', t') \quad \underline{t > t'}$$

ou seja, "leva" Ψ de \vec{r}' (no tempo t') para \vec{r} (tempo posterior t)

Prova: Temos: $(i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{r})) \Psi(\vec{r}, t) = 0$ (Eq de Schrödinger). Aplicando:

$$\begin{aligned} (i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{r})) \int d^3\vec{r}' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \Psi(\vec{r}', t') &= \int d^3\vec{r}' \underbrace{(i\frac{\partial}{\partial t} - H(\vec{r})) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')}_{\equiv \delta(\vec{r}-\vec{r}') \delta(t-t')} \Psi(\vec{r}', t') \\ &= \Psi(\vec{r}', t') \delta(t-t') = 0 \quad \text{se } \underline{t > t'} \end{aligned}$$

Para $t > t'$, podemos escrever $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ para $t > t'$ como uma função retardada na forma:

$$G(\vec{r}, \vec{r}', t > t') = G^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -i \theta(t-t') \langle \vec{r} | e^{-iH(t-t')} | \vec{r}' \rangle$$

que também é uma solução possível da eq $(i\frac{\partial}{\partial t} - H) G^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \delta(t-t')$ (Mostre!)

Uma outra solução possível é a chamada função de Green avancada:

$$G^A(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = +i \theta(t'-t) \langle \vec{r} | e^{-iH(t-t')} | \vec{r}' \rangle$$

Note que G^A "propaga do futuro para o passado", ou seja, a partícula está em um ponto \vec{r}' em um tempo futuro t' e "propaga" para o ponto \vec{r} em um tempo anterior, embora seja matematicamente correta.

O propagador G^R pode ser calculado em outras bases de partícula única, por exemplo:

$$G^R(n, t, n', t') = -i \theta(t - t') \langle \phi_n | e^{-iH(t-t')} | \phi_{n'} \rangle$$

(Leva a partícula do estado $|\phi_{n'}\rangle$ no tempo t' ao estado $|\phi_n\rangle$ no tempo t)

Obviamente, recuperamos $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ por uma simples mudança

de base:

$$\begin{aligned} G^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= -i \theta(t - t') \sum_{nn'} \langle \vec{r} | \phi_n \rangle G^R(n, t, n', t') \langle \phi_{n'} | \vec{r}' \rangle \\ &= -i \theta(t - t') \sum_{nn'} \phi_n(\vec{r}) G^R(n, t, n', t') \phi_{n'}^*(\vec{r}') \end{aligned}$$

Essa forma é particularmente útil se os $\phi_n(\vec{r})$ forem auto-estados do Hamiltoniano: $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \Rightarrow \langle \phi_n | H | \phi_{n'} \rangle = E_n \delta_{nn'}$

$$\begin{aligned} G^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= -i \theta(t - t') \sum_{nn'} \phi_n(\vec{r}) e^{-E_n(t-t')} \delta_{nn'} \phi_{n'}^*(\vec{r}') \\ &= -i \theta(t - t') \sum_n \phi_n(\vec{r}) \phi_n^*(\vec{r}') e^{-E_n(t-t')} \end{aligned}$$

(se $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$)

Funções de Green de partícula única em sistemas de Muitos Corpos

São também chamadas "função de Green" mas as definições são distintas da que vimos até aqui (do mesmo modo que função de onda de muitos corpos são distintas de função de onda de um corpo).

Se $\Psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}, t)$ é um operador de campo associado à criação de uma partícula (fermiônica ou bosônica) de spin σ na posição \vec{r} e tempo t , definimos a função de Green retardada associada $G_{\sigma\sigma'}^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ ($\Psi_{\sigma}(\vec{r}, t)$) na forma:

$$G_{\sigma\sigma'}^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -i \Theta(t-t') \langle [\Psi_{\sigma}(\vec{r}, t), \Psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}', t')]_{\mp} \rangle$$

$- \rightarrow$ bósons
 $+ \rightarrow$ férmions

onde $\langle \dots \rangle = \text{tr}[\hat{\rho} \dots]$ ($\hat{\rho} = e^{-\beta H}$) e $[A, B]_{\mp} = AB_{\mp} - BA$ $- \rightarrow$ bósons
 $+ \rightarrow$ férmions

À "temperatura zero", a média é tomada apenas sobre o estado fundamental de N-partículas. Do mesmo modo, definimos:

$$G_{\sigma\sigma'}^A(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = +i \Theta(t'-t) \langle [\Psi_{\sigma}(\vec{r}, t), \Psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}', t')]_{\mp} \rangle$$

(9)

Existem alguns outros tipos de funções de Green que serão importantes ao longo do curso:

"Greater" $G_{\alpha\alpha'}^>(\vec{r}t; \vec{r}'t') \equiv -i \langle \Psi_0(\vec{r}, t) \Psi_{\alpha'}^\dagger(\vec{r}'t') \rangle$

"Lesser" $G_{\alpha\alpha'}^<(\vec{r}t; \vec{r}'t') \equiv -i (\pm 1) \langle \Psi_{\alpha'}^\dagger(\vec{r}'t') \Psi_\alpha(\vec{r}, t) \rangle$

+ → bóson
- → férmion

Note que:

$$G_{\alpha\alpha'}^R(\vec{r}t; \vec{r}'t') = \Theta(t-t') \left(G_{\alpha\alpha'}^>(\vec{r}t; \vec{r}'t') - G_{\alpha\alpha'}^<(\vec{r}t; \vec{r}'t') \right)$$

$$G_{\alpha\alpha'}^A(\vec{r}t; \vec{r}'t') = \Theta(t'-t) \left(G_{\alpha\alpha'}^<(\vec{r}t; \vec{r}'t') - G_{\alpha\alpha'}^>(\vec{r}t; \vec{r}'t') \right)$$

Mudança de base: as GFs acima podem ser escritas como:

$$G_{\alpha\alpha'}^R(\vec{r}t; \vec{r}'t') = \sum_{\nu\nu'} \Psi_{\nu\alpha}(\vec{r}) G_{\nu\nu'}^R(\nu t, \nu't') \Psi_{\nu'\alpha'}^*(\vec{r}')$$

onde

$$G_{\nu\nu'}^R(\nu t, \nu't') = -i \Theta(t-t') \langle [a_{\nu\nu}(t), a_{\nu'\nu'}^\dagger(t')]_{\pm} \rangle$$

com os operadores $a_{\nu\nu}^\dagger(t)$ escritos na Rep. de Heisenberg

$$a_{\nu\nu}(t) = e^{iHt} a_{\nu\nu} e^{-iHt}$$

Funções de Green para sistemas com invariância

de translações: $G_{\partial\partial'}^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \rightarrow G_{\partial\partial'}^R(\vec{r}-\vec{r}', t, t')$

Na base \vec{k} : $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, temos:

$$\begin{aligned}
G_{\partial\partial'}^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) G_{\partial\partial'}^R(\vec{k}, t; \vec{k}', t') \Psi_{\vec{k}'}(\vec{r}') \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} G_{\partial\partial'}^R(\vec{k}, t; \vec{k}', t') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} \times (e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}) \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} G_{\partial\partial'}^R(\vec{k}, t; \vec{k}', t') e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}'}
\end{aligned}$$

Agora, como $G_{\partial\partial'}^R(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G_{\partial\partial'}^R((\vec{r}-\vec{r}'), t, t')$ esse termo tem que ser igual a 1. Para que isso ocorra, necessariamente, teremos:

$$G_{\partial\partial'}^R(\vec{k}, t; \vec{k}', t') = G_{\partial\partial'}^R(\vec{k}, t, t') \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \text{ logo}$$

$$G_{\partial\partial'}^R(\vec{r}-\vec{r}', t, t') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} G_{\partial\partial'}^R(\vec{k}, t, t')$$

com $G_{\partial\partial'}^R(\vec{k}, t, t') = -i \theta(t-t') \langle [a_{\vec{k}\partial}(t), a_{\vec{k}\partial'}^\dagger(t')]_+ \rangle$

Veremos exemplos desse tipo no modelo de Kondo, por exemplo.

A Representação de Lehmann

(11)

Consideremos agora a transformada de Fourier das GFs. Tratamos por ora ^{de} funções de Green diagonais e iniciamos com as GFs que não envolvem ordens temporais; $G^>$ e $G^<$ p/ férmions

Por exemplo: $G^>(v, t, t') = -i \langle a_v(t) a_v^\dagger(t') \rangle$

$$G^>(v, t, t') = -i \frac{1}{Z} \sum_{|K\rangle} \langle |K\rangle | e^{-\beta H} a_v(t) a_v^\dagger(t') | |K\rangle$$

onde $|K\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots} C_{|K\rangle\{n_i\}} |n_{v_1}, n_{v_2}, n_{v_3}, \dots\rangle_N$ são estados de N partículas.

Consideremos a base "especial" $H|K\rangle = E_K|K\rangle : (\mathbb{1} = \sum_{|K\rangle} |K\rangle\langle K|)$

$$G^>(v, t, t') = -i \frac{1}{Z} \sum_{|K\rangle, |K'\rangle} e^{-\beta E_K} \underbrace{\langle |K\rangle | a_v(t) | |K'\rangle \rangle}_{\langle |K\rangle | a_v | |K'\rangle \rangle e^{+i(E_K - E_{K'})t}} \underbrace{\langle |K'\rangle | a_v^\dagger(t') | |K\rangle \rangle}_{\langle |K'\rangle | a_v^\dagger | |K\rangle \rangle e^{-i(E_K - E_{K'})t'}}$$

$$G^>(v, t, t') = -i \frac{1}{Z} \sum_{|K\rangle, |K'\rangle} e^{-\beta E_K} \langle |K\rangle | a_v | |K'\rangle \rangle \langle |K'\rangle | a_v^\dagger | |K\rangle \rangle e^{+i(E_K - E_{K'})(t-t')}$$

No espaço de frequência $G^>(v, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt (t-t') e^{i\omega(t-t')} G^>(v, t-t')$, temos:

$$G^>(v, \omega) = -i \frac{1}{Z} 2\pi \sum_{|K\rangle, |K'\rangle} e^{-\beta E_K} \langle |K\rangle | a_v | |K'\rangle \rangle \langle |K'\rangle | a_v^\dagger | |K\rangle \rangle \delta(E_K - E_{K'} + \omega)$$

Já que $\delta(E_1 - E_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i(E_1 - E_2)t} dt$

Para férmions, obtenho de forma similar:

$$G^<(v, t, t') = -i (-1) \langle a_v^+(t') a_v(t) \rangle = +i \langle a_v^+(t') a_v(t) \rangle$$

(...)

$$G^<(v, \omega) = +i \frac{2\pi}{z} \sum_{|K|K'} e^{-\beta E_K} \langle |K| a_v^+ ||K'\rangle \langle |K'| a_v ||K\rangle \delta(E_{|K|} - E_{|K'|} - \omega)$$



Troca $|K| \leftrightarrow |K'|$ e $e^{-\beta E_K} \rightarrow e^{-\beta E_{K'}} = e^{-\beta(E_K + \omega)}$ (...)

$$G^<(v, \omega) = +i \frac{2\pi}{z} \sum_{|K|K'} e^{-\beta(E_K + \omega)} \langle |K'| a_v^+ ||K\rangle \langle |K| a_v ||K'\rangle \delta(E_{|K'|} - E_{|K|} - \omega)$$

$$= -G^>(v, \omega) e^{-\beta \omega} \text{ que relaciona } G^<(\omega) \text{ e } G^>(\omega)$$

Agora vamos à GF retardada, lembrando que, nesse caso precisamos fazer $\omega \rightarrow \omega + i\eta$ ($\eta \rightarrow 0^+$) para definir a transformada.

Seja $t > t' \equiv 0$, para FÉRMIONS:

$$G^R(v, t, 0) = -i \langle [a_v(t), a_v^+(0)]_+ \rangle = -i \langle a_v(t) a_v^+(0) + a_v^+(0) a_v(t) \rangle$$

$$= \frac{-i}{z} \sum_{|K|K'} e^{-\beta E_{|K|}} \left(\langle |K| a_v ||K'\rangle \langle |K'| a_v^+ ||K\rangle e^{+i(E_K - E_{K'})t} + \langle |K| a_v^+ ||K'\rangle \langle |K'| a_v ||K\rangle e^{-i(E_K - E_{K'})t} \right) \rightarrow \text{TRANSF. FOURIER} \rightarrow$$

$$\Rightarrow G^R(v, \omega) = \frac{-i}{z} \sum_{|K|K'} e^{-\beta E_K} \langle |K| a_v ||K'\rangle \langle |K'| a_v^+ ||K\rangle \int d\omega e^{i\omega t} e^{i(E_K - E_{K'})t} + \langle |K| a_v^+ ||K'\rangle \langle |K'| a_v ||K\rangle \int d\omega e^{i\omega t} e^{-i(E_K - E_{K'})t}$$

$$\Rightarrow G^R(v, \omega) = \frac{1}{z} \sum_{|K|K'} e^{-\beta E_K} \frac{\langle |K| a_v ||K'\rangle \langle |K'| a_v^+ ||K\rangle}{\omega + i\eta + (E_K - E_{K'})} + \frac{\langle |K| a_v^+ ||K'\rangle \langle |K'| a_v ||K\rangle}{\omega + i\eta - (E_K - E_{K'})}$$

essa é a chamada Representação de Lehmann de G^R

Trocando $|k\rangle \leftrightarrow |k'\rangle$ em um dos termos, podemos escrever:

$$G^R(\nu, \omega) = \frac{1}{Z} \sum_{|k\rangle |k'\rangle} \frac{\langle |k\rangle | a_\nu | |k'\rangle \rangle \langle |k'\rangle | a_\nu^\dagger | |k\rangle \rangle}{\omega + i\eta + (E_{|k\rangle} - E_{|k'\rangle})} (e^{-\beta E_{|k\rangle}} + e^{-\beta E_{|k'\rangle}})$$

Uma quantidade importante é a função espectral associada:

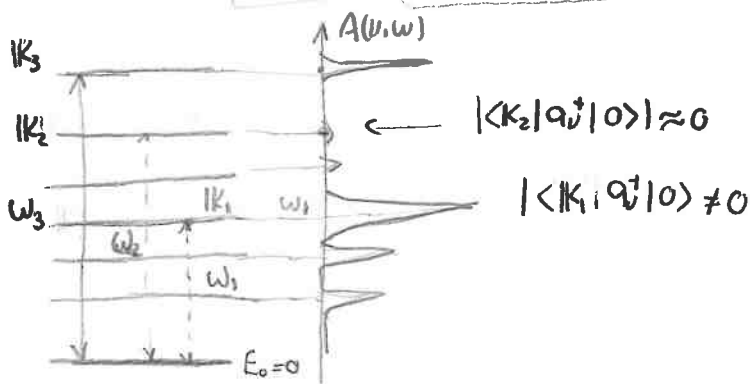
$$A(\nu, \omega) \equiv -\frac{1}{\pi} \text{Im} G^R(\nu, \omega)$$

Para obter $\text{Im} G^R$, usamos a identidade $\frac{1}{\omega \pm i\eta} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) \mp i\pi \delta(\omega)$

$$-\frac{1}{\pi} \text{Im} G^R(\nu, \omega) = \frac{1}{Z} \sum_{|k\rangle |k'\rangle} \langle |k\rangle | a_\nu | |k'\rangle \rangle \langle |k'\rangle | a_\nu^\dagger | |k\rangle \rangle (e^{-\beta E_{|k\rangle}} + e^{-\beta E_{|k'\rangle}}) \delta(\omega + (E_{|k\rangle} - E_{|k'\rangle}))$$

já que $\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) \rightarrow 0$. É instrutivo considerar o caso $T=0$ ($\beta \rightarrow \infty$) onde apenas o estado fundamental ($E_k=0$) "salva" os fatores de Boltzmann:

$$A^{T=0}(\nu, \omega) = \frac{1}{Z} \sum_{|k'\rangle} |\langle |k'\rangle | a_\nu^\dagger | 0 \rangle|^2 \delta(\omega - E_{|k'\rangle})$$



↑ picos p/ ω ressonantes com estados conectados ao estado fundamental pelo operador a_ν^\dagger . $|\langle |k'\rangle | a_\nu^\dagger | 0 \rangle|^2 \rightarrow$ "força de oscilador".

Outro resultado interessante:

$$A(\nu, \omega) = \frac{1}{Z} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle \mathbf{k} | a_{\nu} | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | a_{\nu}^{\dagger} | \mathbf{k} \rangle e^{-\beta E_{\mathbf{k}}} (1 + e^{-\beta \omega}) \underbrace{\delta(\omega - (E_{\mathbf{k}'} - E_{\mathbf{k}}))}_{= \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'} + \omega)}$$

$$= (1 + e^{-\beta \omega}) \frac{i}{2\pi} G^>(\nu, \omega) \Rightarrow \boxed{(1 + e^{-\beta \omega}) 2\pi A(\nu, \omega) = i G^>(\nu, \omega)}$$

Identificando: $n_F(\omega) \equiv (1 + e^{\beta \omega})^{-1} \Rightarrow n_F^{-1}(\omega) - 1 = e^{\beta \omega}$

$$\frac{1}{(1 + e^{-\beta \omega})} = n_F(\omega) e^{\beta \omega}$$

$\Rightarrow (1 + e^{-\beta \omega})^{-1} = (1 - n_F(\omega))$ temos o "Teorema de flutuações-dissipação":

$$\boxed{i G^>(\nu, \omega) = 2\pi (1 - n_F(\omega)) A(\nu, \omega)}$$

ou, usando $G^< = -e^{-\beta \omega} G^> = -\frac{n_F}{(1 - n_F)} G^>$

$$\boxed{-i G^<(\nu, \omega) = 2\pi n_F(\omega) A(\nu, \omega)}$$

Pode-se ainda derivar as relações:

$$G^R(\nu, \omega) = \int d\omega' \frac{A(\nu, \omega')}{\omega - \omega' + i\eta}$$

$$G^A(\nu, \omega) = \int d\omega' \frac{A(\nu, \omega')}{\omega - \omega' - i\eta}$$

$$\Rightarrow \boxed{G^R(\nu, \omega) = (G^A(\nu, \omega))^*}$$

na rep. de frequência.

Em geral:

$$\underline{G^R(\nu, \nu', \omega) = (G^A(\nu, \nu', \omega))^*}$$