PGF5295 - Teoria Quântica de Muitos Corpos em Matéria Condensada

Lista de exercícios 2 - 2s/2015 (entrega em 08/10/2015)

1. Mostre que valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}[AB,C] &= A[B,C]+[A,C]B \\ [AB,C] &= A\{B,C\}-\{A,C\}B\end{aligned}$$

onde $\hat{A}$,$\hat{B}$ e $\hat{C}$ operadores na rep. de Schrödinger. Essas relações (gerais) são muito úteis para derivar equações de movimento para bósons e férmions respectivamente.

2. Revisão de variáveis complexas.
Mostre que:

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\omega+i\eta}=\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right)-i\pi\delta(\omega)$$

onde $\mathcal{P}$ indica a parte principal de Cauchy ($\delta\to 0$):

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x-x_0}\equiv\int_{-\infty}^{x_0-\delta}\frac{f(x)dx}{x-x_0}+\int_{x_0+\delta}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x-x_0}$$

Sugestão: escreva $(\omega+i\eta)^{-1}$ como uma integral.

3. Revisão de Variáveis Complexas II Mostre que a função degrau pode ser representada na forma:

$$\theta(t-t')=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega+i\eta}\ .$$

Sugestão: faça a integral no plano complexo $z=\omega+ib$, escolhendo o contorno adequado.

4. Prove que, em um sistema de *partículas independentes*, vale a propriedade:

$$\langle a^\dagger_\nu a^\dagger_\mu a_{\mu'}a_{\nu'}\rangle=\langle a^\dagger_\nu a_{\nu'}\rangle\langle a^\dagger_\mu a_{\mu'}\rangle\pm\langle a^\dagger_\nu a_{\mu'}\rangle\langle a^\dagger_\mu a_{\nu'}\rangle$$

onde o sinal $\pm$ indica operadores bosonicos/fermionicos respectivamente.

Sugestão: Use o fato que, no caso de partículas independentes, os auto-estados de muitos corpos podem ser escritos como produtos de estado de um corpo na base de números de ocupação.

5. Regra de Ouro de Fermi

Trataremos do caso de um potencial $V(t)$ que dependa explicitamente do tempo (um campo elétrico oscilatório, por exemplo). Potenciais desse tipo, ainda que fracos, muitas vezes podem mediar transições entre estados de energia em um sistema. Nesse caso, uma aproximação comum é supor que a interação tenha sido "adiabaticamente ligada"no passado distante ($t\to-\infty$).

Considere um Hamiltoniano na forma $H=H_0+V(t)$ onde H_0 é dado por $H_0|\nu\rangle=E_\nu|\nu\rangle$ e $V(t)=\hat{V}e^{\eta t}$, sendo $\hat{V}$ um operador e η uma constante pequena mas positiva (de modo que $V(t\to-\infty)\to 0$).

Suponha que H_0 tenha dois estados, $|i\rangle$ e $|f\rangle$ e o sistema esteja inicialmente ($t=t_0$) no estado $|i\rangle$.

(a) Escreva a expressão para o overlap $\langle f|i(t)\rangle$ entre o estado $|f\rangle$ e o estado $|i(t)\rangle$ (escrito na representação de Schrödinger) no tempo $t>t_0$ em termos do operador de evolução temporal na Representação de Interação $\hat{U}(t,t_0)$.

(b) Mostre que, em primeira ordem em $\hat{V}$ e para $t_0\to-\infty$:

$$\langle f|i(t)\rangle=-\langle f|\hat{V}|i\rangle\frac{e^{-iE_i(t-t_0)}e^{\eta t}}{E_f-E_i-i\eta}$$

(c) Calcule a probabilidade $P(t)=|\langle f|i(t)\rangle|^2$ de se encontrar o sistema no estado $|f\rangle$ no tempo t.

(d) Mostre que, para $\eta\to 0$, a taxa de mudança dessa probabilidade $dP(t)/dt$ é constante dada por:

$$\Gamma_{i\to f}=2\pi|\langle f|\hat{V}|i\rangle|^2\delta(E_f-E_i)$$

que é a chamada *Regra de Ouro de Fermi* (Fermi Golden Rule).

6. Mostre explicitamente que

$$\tfrac{1}{3!}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\int_0^t dt_3\ \ T\left[\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)\hat{V}(t_3)\right]=$$

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\int_0^{t_2} dt_3\ \ \hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)\hat{V}(t_3)$$

7. Funções de Green avançadas e retardadas: Mostre que

$$G^R(\mathbf{r}t,\mathbf{r}'t')=-i\theta(t-t')\langle\mathbf{r}|e^{-iH(t-t')}|\mathbf{r}'\rangle$$

e

$$G^A(\mathbf{r}t,\mathbf{r}'t')=i\theta(t'-t)\langle\mathbf{r}|e^{-iH(t-t')}|\mathbf{r}'\rangle$$

são soluções independentes da equação diferencial

$$\left[i\frac{d}{dt}-H\right]G(\mathbf{r}t,\mathbf{r}'t')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

Sugestão: use o fato de que $\frac{d}{dt}\theta(t-t')=\delta(t-t')$.

8. Função de Green para elétrons livres

Considere o Hamiltoniano de elétrons livres (com simetria de translação) $H_0 = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \epsilon_k c^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} c_{\mathbf{k},\sigma}$ onde $\epsilon_k = k^2/2m_e$.

(a) Mostre que a função de Green "lesser"é dada pela expressão:

$$G_0^<(\mathbf{k}\sigma, t-t') = i\langle c^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} c_{\mathbf{k},\sigma}\rangle e^{-i\epsilon_k(t-t')}$$

(b) Mostre que o Teorema de flutuação e dissipação leva à condição:

$$G_0^<(\mathbf{k}\sigma,\omega) = 2\pi i\; n_F(\epsilon_k)\; \delta(\omega-\epsilon_k)$$

onde $n_F(\omega)$ é a distribuição de Fermi-Dirac.

(c) Usando os resultados acima, mostre que $\langle c^\dagger_{\mathbf{k},\sigma} c_{\mathbf{k},\sigma}\rangle = n_F(\epsilon_k)$.

Chegamos assim em um resultado usual (ocupação média do nível $\mathbf{k}$ é dada pela distribuição de Fermi-Dirac) via funções de Green.

(d) Por fim, calcule a função de Green retardada à temperatura zero $G^R_{\sigma,\sigma'}(\mathbf{k},\omega)$ para o gás de elétrons livres com vetor de onda de Fermi k_F.

Sugestão: use a definição da função de Green retardada e aplique os operatores $c_{\mathbf{k},\sigma}$ e $c^\dagger_{\mathbf{k},\sigma}$ diretamente no estado fundamental.